DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA MATEMATIKANING YONDOSH TARMOQLARINING ZAMONAVIY MUAMMOLARI

XALQARO ILMIY-AMALIY KONFERENSIYA

MATERIALLAR TO'PLAMI



2026-YIL 22-MAY

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

QO‘QON DAVLAT UNIVERSITETI

“SCIENCE AND INNOVATION” XALQARO ILMIY JURNALI

“DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA MATEMATIKANING YONDOSH TARMOQLARINING ZAMONAVIY MUAMMOLARI” MAVZUSIDAGI XALQARO ILMIY-AMALIY KONFERENSIYASI

MATERIALLAR TO‘PLAMI

2026-yil 22-may

COLLECTION OF MATERIALS

OF THE INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE “MODERN PROBLEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND RELATED FIELDS OF MATHEMATICS”

May 22, 2026

Toshkent – 2026

ISSN: 2181-3337

“Differensial tenglamalar va matematikaning yondosh tarmoqlarining zamonaviy muammolari” mavzusidagi xalqaro ilmiy-amaliy konferensiyasi materiallar to‘plami (2026-yil 22-may) – T.: Science and Innovation, 2026.

Nashr etishda qatnashganlar:

Baxtiyor Rustamov, Gulira’no Rakhmatullayeva, Kozim Ergashov, Mansur Suyunkulov, Feruza Ollamurodova, Dilnoza Narzullayeva, Sevara O‘rinboyeva, Asila Khaydaraliyeva, Samandar Rasulov

Tahrir hay’ati a’zolari

D.D.Aroyev	PhD dotsent
M.M.Otaboyev	PhD v.b dotsent
U.M.Akbarov	f.m.f.n fan nomzodi
B.M.Mamadaliyev	f.m.f.n fan nomzodi
X.Sh.Turakulov	PhD dotsent
Sh.Y. Jo'rayev	PhD
M.M.Esonov	PhD
M.I.Yakubjonova	PhD dotsent
X.B.Tadjimatova	PhD
X.T.Dexqonov	PhD
M.Z.Qambarov	PhD dotsent
M.S.Abdullayeva	PhD
M.A.Asqaraliyeva	PhD
D.R.Muydinjanov	PhD
G.A.Rasulova	PhD dotsent

© Qo‘qon davlat universiteti
© “Science and Innovation” xalqaro ilmiy jurnali
© Mualliflar

KIRISH SO‘ZI

Hurmatli konferensiya ishtirokchilari! Siz, aziz mehmonlarimizni, xalqaro konferensiya ishtirokchilarini, nufuzli xalqaro universitetlar vakillari, professorlar, mutaxassis-amaliyotchilar, mustaqil ilmiy izlanuvchilarni mazkur konferensiyada qatnashayotganingiz uchun yuksak hurmat ehtirom va samimiy minnatdorchilik bildirish menga katta mamnuniyat bag‘ishlaydi.

Bugungi jadal odimlayotgan globallashuv davrida o‘zining mustaqil fikriga ega, milliy qadriyatlar ruhida kamol topgan, ma’nan boy, intellektual salohiyatli yosh avlodni tarbiyalash davlatimiz va jamiyatimizda turgan muhim vazifa hisoblanadi. Zero, Prezidentimiz ta’kidlaganidek, “Bugun biz yashayotgan internet va yuksak texnologiyalar asrida matematika va uning o‘rni va ta’sirini nafaqat saqlab qolish, balki qanday qilib uni kuchaytirish mumkin, degan to‘g‘ri va odilona savollar barchamizni, birinchi navbatda, xalqimizning eng ilg‘or vakillarini o‘ylantirish zarur”. Matematika fani dunyo haqidagi bilimlar sistemasidir. Fan kishilik jamiyatining paydo bo‘lishi bilan shakllangan. Fan va texnika bir biriga uzviy bog‘liqdir. U moddiy va ma’naviy bo‘lgan ilmiy ijod natijalarini tatbiq etishda, kashf qilishda, yuksaltirishida xizmat qiladi. Fanning rivojlanishi esa faktlarga tayanadi, ular o‘rganiladi, umumiylashtiriladi va yangi qonuniyatlar ochiladi.

Ilm-fan har qanday davlatni rivojlanishiga asosiy kuch hisoblanadi. Olimlari ko‘p davlat esa hamma vaqt, har sohada rivojlanadi, ravnaq topadi. Shu sababli ham go‘zal diyorimizdagi ilm fan taraqqiyoti jahon arenalarida tutgan o‘rni yuksak bahoga egadir. Ana shu sababli qomusimiz bo‘lgan Konstitutsiyamizda davlat jamiyatning ilmiy va texnikaviy rivojlanishiga g‘amxo‘rlik qilish bejiz qayd etilmagan.

Ma’lumki, uzoq o‘tmishga ega O‘rta Osiyo xalqlari taraqqiyoti tarixi o‘z boshidan turli voqealarni, yuksalish va ilm-fanning orqaga ketishini boshdan kechirdi. Ammo, IX-XII asrlarda “Bayt ul-hikma” (“Donishmandlar uyi”) bo‘lgan Ma’mun akademiyasiga asos solindi. Bu maskanda ulug‘ allomalar, olimlar, ijod qildilar. Buyuk bobokalonimiz Imom al Buxoriy ta’kidlaganidek, “dunyoda ilmdan boshqa najot yoq va bo‘lmag‘ay”. Statistikaga ko‘ra bugungi kunda mustaqil o‘lkamizda 30 mingdan ziyod shaxs ilmiy tadqiqot ishlari bilan shug‘ullanadi, ularning 27 mingdan ortig‘i oliy ma’lumotga ega. Har yili O‘zbekiston Respublikasi Davlat byudjetining bir qismi ta’lim va ilm fanga sarflanadi.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Shavkat Mirziyoyevning 2020-yil 29-oktyabrdagi PF-6097-son Farmoni bilan tasdiqlangan Ilm-fanni 2030-yilgacha rivojlantirish borasidagi 19 ta muammo alohida belgilandi. Bu muammolarni hal etish yo‘lida talay chora-tadbirlar olib borilmoqda. Dunyo miqyosida keskin tus olayotgan shiddatli raqobatga faqatgina zamonaviy ilm fan, yuqori texnologiyalar va innovatsion yutuqlar orqali munosib javob berishimiz darkor. Butun dunyodagi har tomonlama rivojlangan davlatlar faqatgina mahsulotning eksporti yoki importini ko‘paytiribgina qolmay, balki bilimga e’tibor yo‘lida ilmiy yutuqlarga ega innovatsion iqtisodiyotga o‘tish vazifasini qo‘ymoqda. Ana shu asnoda mamlakatimizda uch yuzdan ortiq ilmiy tadqiqot muassasalari, oliy o‘quv yurtlari, tajriba konstruktorlik tashkilotlari, ilmiy ishlab chiqarish korxonalari, kichik innovatsion markazlar va boshqa ilmiy texnikaviy bazalar faoliyat olib bormoqda.

Ishonchim komilki, ushbu konferensiyadan so‘ng sifatli ta’lim berish yo‘lida xalqaro hamkorlikni yanada kengaytirish uchun yangi imkoniyatlar eshigi ochiladi. Bugungi konferensiyamiz qizg‘in muhokama va munozaraga, o‘zaro fikr almashinuvga, unda yangi g‘oya va tashabbuslarni qo‘lga kiritishdagi taklif va tavsiyalar ishlab chiqilishiga ishonchim komil.

Muhtaram Prezidentimizning ilm-fan vakillari bilan uchrashuvida olimlarni qo‘llab quvvatlash davlatning ustuvor vazifalaridan biri ekanligini ta’kidlagan edilar.

Shu o‘rinda janobi oliylari Shavkat Mirziyoyev tomonidan “Harakatlar strategiyasidan taraqqiyot strategiyasi sari” tamoyili asosida keyingi besh yillikda mamlakatimizda amalga oshirilayotgan islohotlarning zarur siyosiy-huquqiy, ijtimoiy-iqtisodiy va ilmiy-ma’rifiy asoslarini yaratib berishga qaratilgan. Universitetimizda tashkil etilgan yetuk olimlar, ilmiy izlanuvchilarni o‘zida birlashtirgan **“Differensial tenglamalar va matematikaning yondosh tarmoqlarining zamonaviy muammolar”** mavzusidagi xalqaro konferensiya xalqimizning eng ilg‘or qismini kamol toptirish yo‘lida xizmat qilayotir. Quvonarlisi, ushbu konferensiyada nafaqat turdosh oliy o‘quv yurtlari, balki qator mamlakatlar vakillari ham o‘z ilmiy ishlari bilan ishtirok etishmoqda. Bu esa anjumanda qatnashayotgan yosh tadqiqotchilarga tajriba almashinishi uchun chinakamiga mahorat maktabi bo‘ladi desak, mubolag‘a bo‘lmaydi.

Jamiyatimizda sodir bo‘layotgan notinchlik davrida mana shu ilm-fan, ziyo maqsadida Osiyo qit’asining millatlarini mana shu yerda to‘planishidan beixtiyor xursandman. Bunday mas’uliyati vazifani o‘z bo‘yniga olgan, millat taqdiriga befarq bo‘lmagan, diyorimizni dunyoga tanitmoqni maqsad qilgan bo‘lajak olim va olimalarimizga ilm sari tashlagan yana bir qadamingiz qutlug‘ bo‘lsin deymiz!

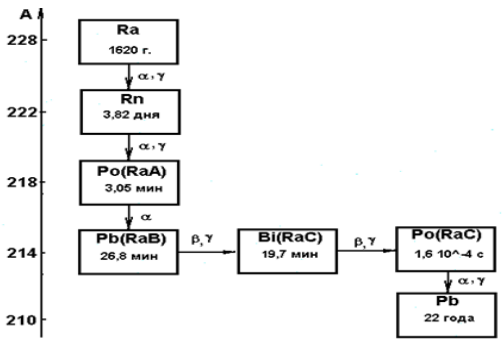
Xodjayeva Dilnoza Shavkatovna
Qo‘qon davlat universiteti rektori

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ЭМАНАЦИОННОГО МЕТОДА

Паровик Р.И.[1], Отабоев М.[2]
[1]Институт космофизических исследований
и распространения радиоволн ДВО РАН, parovik@ikir.ru,
[2]Кокандский государственный университет.
Заведующий кафедрой математики.
https://doi.org/10.5281/zenodo.20594850

В работе рассматриваются математические модели классической и неклассической теории эманационного метода на примере переноса радона. Показано, что неклассические модели более гибко описывают миграцию радона за счет порядка дробной производной.
Ключевые слова: модели, теория эманационного метода, дробная производная.
This paper examines mathematical models of classical and non-classical emanation theory using radon transport as an example. It is shown that non-classical models provide a more flexible description of radon migration due to the order of the fractional derivative.
Keywords: models, emanation theory, fractional derivative.
Ushbu maqolada radon tashish misolida klassik va klassik bo‘lmagan emanatsiya nazariyasining matematik modellari ko‘rib chiqiladi. Klassik bo‘lmagan modellar kasr hosilasining tartibi tufayli radon migratsiyasining yanada moslashuvchan tavsifini taqdim etishi ko‘rsatilgan.
Kalit so‘zlar: modellar, emanatsiya nazariyasi, kasr hosilasi.

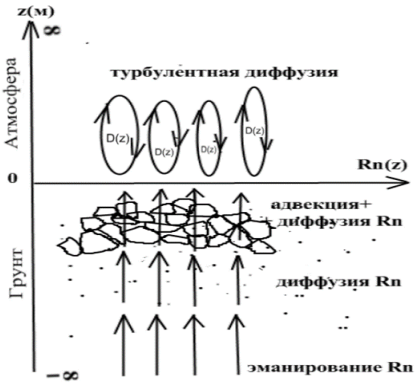
Введение в классическую теорию эманационного метода. Изучением массопереноса эманаций (радиоактивных газов) в геологических средах занимаются не один десяток лет. В России такие исследования проводились под руководством А.Г. Граммакова в 30-е годы XX века, как правило, с целью обнаружения залежей урановых руд [1-4]. В результате проведенных исследований были разработаны математические модели, которые легли в основу теории эманационного (газового) метода поиска полезных ископаемых и нашли свое отражение в монографиях [5-6]. Как правило в качестве эманации выступает радон (^{222}Rn). Радон - химический элемент нулевой группы периодической системы элементов с атомным номером 86.



На рис. 1 показан участок уранового ряда радиевой группы. Дочерним продуктом распада Ra является газообразный радионуклид ^{222}Rn с периодом полураспада 3.825 дня. В результате распада ^{222}Rn образуются радиоактивные короткоживущие изотопы полония (RaA, RaC), свинца (RaB) и висмута (RaC).

Рис.1 Участок уранового ряда

В обычных условиях радон является одноатомным химически инертным газом, хорошо растворимым в воде и других жидкостях. Газообразное состояние приводит к особой форме его массопереноса к дневной поверхности из горных пород. Начальным



процессом появления радона является эманирование, под которым понимается выделение радиоактивного газа (эманации) в поровое пространство из твердого вещества, содержащего радий, что является причиной появления радона в геосреде и при его дальнейшем массопереносе в грунтовых водах и атмосфере (. 2).

На втором этапе процесса происходит чисто молекулярное диффузионное распространение радона в мелких порах грунта до тех пор, пока он не попадет в более крупные поры, в которых уже может иметь место адвекция. На третьем этапе Рис. Рис 2. Перенос ^{222}Rn процесса радоновыделения имеет место диффузионно-конвективный процесс переноса по крупным порам грунта, заканчивающийся его стоком в атмосферу.

Диффузионно-конвективный перенос радона можно описать следующем уравнением [5]

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial t} = D_G \frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial z^2} - v_G \frac{\partial A(z,t)}{\partial z} - \lambda\left(A(z,t) - A_\infty\right),$$

$$(1)\ A(z,0) = A_\infty, A(0,t) = 0, \lim_{z\to-\infty} A(z,t) = A_\infty,$$

.где $A(z,t)$ - объемная активность радона, Бк/м^3, $D_G = \eta D_E$ - истинный коэффициент диффузии, м^2/с; D_E - эффективный коэффициент диффузии в поровом пространстве среды, м^2/с; η - коэффициент пористости среды, отн. ед.; λ – постоянная распада радона, с$^{-1}$; A_∞ - поровая активность радона, находящегося в радиоактивном равновесии с ^{226}Ra, равная $A_\infty = K_{em} A_{Ra} \rho_d / \eta$, K_{em} - коэффициент эманирования, равный доле радона, который выделился в свободное состояние в поры пористой среде, отн. ед.; A_{Ra} – удельная активность ^{226}Ra в породе (Бк/кг); ρ_d – плотность сухого грунта, кг/м^3.

Решение начально-краевой задачи (1) можно получить с помощью интегрального преобразования Лапласа.

1) Стационарный случай $\frac{\partial A(z,t)}{\partial t} = 0$.

$$A(z) = A_\infty \left(1 - e^{-z\left(-\frac{v}{2D_G} + \sqrt{\left(\frac{v}{2D_G}\right)^2 + \frac{\lambda}{D_G}}\right)}\right). \qquad (2)$$

2) Нестационарный случай $\frac{\partial A(z,t)}{\partial t} \neq 0$

$$A(z,t)=A_{\infty}\left(1-\frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} e^{z\left(\frac{v_G}{2D_G}-\sqrt{\left(\frac{v_G}{2D_G}\right)^2+\frac{\lambda}{D_G}}\right)}erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{D_G t}}-\sqrt{\left(\frac{v_G^2}{4D_G}+\lambda\right)t}\right)+ \\ e^{z\left(\frac{v_G}{2D_G}+\sqrt{\left(\frac{v_G}{2D_G}\right)^2+\frac{\lambda}{D_G}}\right)}erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{D_G t}}+\sqrt{\left(\frac{v_G^2}{4D_G}+\lambda\right)t}\right) \end{array}\right)\right). \qquad (3)$$

Здесь $erfc(z)=1-erf(z), erf(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-y^2}dy$ - интеграл ошибок, табулирован.

Более подробно диффузионно-конвективный в системе грунт-атмосфера перенос рассмотрен в работах автора [7-9].

Элементы неклассической теории эманационного метода. В работах Граммакова А.Г., Булашевича Ю.П., Новикова Г.Ф и др. была предложена модель диффузионно-конвективного массопереноса радона в однородной пористой среде, которая стала классической. Эта модель нашла широкое распространение в различных модификациях и используется в настоящее время. Согласно этой модели на поверхности рыхлых отложений объёмная активность радона (ОА Rn) может указывать на наличие тел с повышенным содержанием материнского элемента Ra на глубинах несколько десятков метров. Столь низкая миграционная способность Rn обусловлена сравнительно коротким периодом полураспада (3.82 суток) и высоким атомным весом (222). Однако с помощью эманационной съемки в некоторых случаях локализуются радийсодержащие тела, находящиеся на глубинах до 500 м. Один из подходов к объяснению увеличения миграции радона дает теория «геогаза» [10], суть которой сводится к тому, что во влагонасыщенных трещиноватых породах по трещинам, заполненным флюидом, поднимаются микропузырки глубинного газа (геогаза), что значительно увеличивает скорость его миграции к дневной поверхности. Однако, как в рамках классической диффузионно-конвективной модели, так и с помощью теории «геогаза», трудно объяснить высокую миграционную способность радона в рыхлых отложениях.

В работе показано [11], что геологическая среда обладает фрактальными свойствами. В этом случае миграция радона за счет супердиффузии должна протекать гораздо интенсивнее. Транспортные свойства случайно-неоднородных сред в рамках фрактального представления изучаются теорией перколяции [12]. Известно, что кратковременные аномалии в гидрогеохимических полях, которые рассматриваются как предвестники сильных землетрясений, могут быть обусловлены эффектами перколяции. Сущность этих эффектов состоит в том, что среду, где происходит перенос, рассматривают как перколяционный кластер, т.е. систему узлов (поры) и связей между ними. Свойства узлов и связей тесно связаны с фрактальной размерностью, которая характеризует «сложность» рассматриваемой среды, причем распределение пор и связей подчиняется степенному закону с дробным показателем и, как правило, обладает самоподобной структурой. В классической теории эманационного метода концентрация радона при миграции к поверхности спадает по экспоненте. Если среда обладает фрактальными свойствами, которые характеризуют процесс аномальной диффузии, то концентрация Rn при миграции к земной поверхности должна уменьшаться по степенному закону. Такие процессы изучаются в рамках неклассической теории эманационного метода [13].

Математическая модель супердиффузии радона во фрактальном пористом грунте. Рассмотрим следующую задачу [14]:

$$D_G D_{0x}^{\alpha} A(x) - \lambda A(x) + \lambda A_{\infty} = 0, \lim_{x\to\infty} D_{0x}^{\alpha-1} A(x) = A_{\infty} \left(\lambda / D_G\right)^{1-1/\alpha}, \lim_{x\to\infty} D_{0x}^{\alpha-2} A(x) = 0. \qquad (6)$$

Дробная производная Римана-Лиувилля порядка $1 < \alpha < 2$:

$$D_{0x}^{\alpha} A(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \frac{A(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{\alpha-1}}.$$

Решение задачи (6) дается в терминах специальной функции Миттаг-Леффлера:

$$A(x) = A_{\infty} \left(1 + \left(\lambda / D_G\right)^{1-1/\alpha} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(x^{\alpha} \lambda / D_G\right) - E_{\alpha,1}\left(x^{\alpha} \lambda / D_G\right)\right), \qquad (7)$$

где $E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k / \Gamma(\alpha k + \beta)$, $\Gamma(\cdot)$ -- гамма-функция.

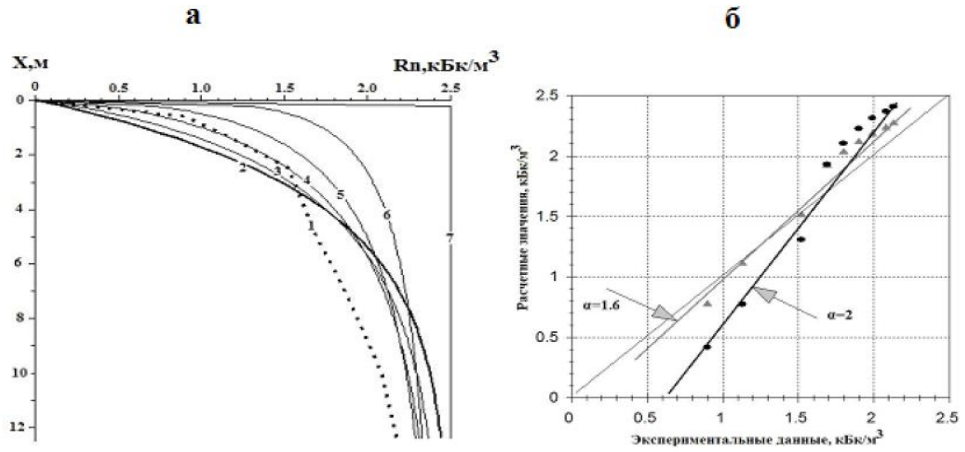


Рис. 4. Кривая распределения концентрации радона на глубине (кривая 1), проведенная через экспериментальные точки работы [15] и семейство расчетных кривых (7) объемной активности $A(x)$ во фрактальной среде с A_{∞} = 2.5 кБк/м3 в зависимости от параметра α (а). Корреляционное поле между значениями OARn экспериментальной кривой и значениями расчетных кривых с α = 2 и α = 1.6 (б): 1 – экспериментальные данные; 2 – α = 2; 3 – α = 1.8; 4 – α = 1.6; 5 – α = 1.4; 6 – α = 1.2; 7 – α = 1.

В работе [15] приведены экспериментальные данные по регистрации Rn на глубинах 0.8, 5.5, 9 и 11.5 м, которые приведены на рис. 4 (кривая 1). Форма кривой объясняется тем, что, возможно, имеется распределенный источник (наличие источников Rn в среде на пути миграции), или существует нелинейная диффузия, когда D_G является функцией концентрации, с конвективной составляющей - фильтрационное течение. В работе отдается предпочтение второму объяснению, но с определенной долей условности можно предположить наличие распределенного источника и рассмотреть кривую изменения ОА Rn с глубиной согласно рассмотренной модели.

Заключение. Пример приведенный выше показывает, что математические модели построенная на основе операторов дробных производных более гибко описывают процессы переноса, чем классические модели, построенные на целочисленных производных. Однако остается открытым вопрос о связи порядка дробной производной со свойствами среды, например, с ее фрактальной размерностью.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИКИР ДВО РАН №124012300245-2. Тема "Взаимодействие физических процессов в системе ближнего космоса и геосфер" (2024-2028 гг.).

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Граммаков А.Г. Эманационный (радоновый) метод поисков, исследования и разведки радиоактивных объектов. Тр. ЦНИГРИ, 1934. №. 7. 115 с.
2. Grammakov A.G. On the influence of same factors in the spreading of radioactive emanations under natural conditions // Zhur. Geofiziki. 1936. vol. 6. P. 123-148.
3. Граммаков А.Г., Никонов Г.П., Тарфеев Г.П. Радиометрические методы поисков и разведки урановых руд. М.: Госгеолтехиздат, 1957. 610 с.
4. Булашевич Ю.П., Хайритдинов Р.К. Диффузия эманации в пористых средах // Изв. АН СССР. Серия Геофизика. 1959. № 12. С. 1787–1792.
5. Новиков Г.Ф., Капков Ю.Н. Радиоактивные методы разведки. Л.: Недра, 1965. 759 с.
6. Паровик, Р. И. Математические модели классической теории эманационного метода. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2014. 128 с.
7. Паровик Р.И., Ильин И.А., Фирстов П.П. Математическая диффузионная модель массопереноса радона (222Rn) в грунте и его эксхаляции в приземный слой атмосферы // Вестник Камчатской региональной ассоциации Учебно-научный центр. Серия: Науки о Земле. 2006. № 1(7). С. 110-114.
8. Паровик Р.И., Ильин И.А., Фирстов П.П. Модель массопереноса радона (222Rn) в приземный слой атмосферы // Вестник Камчатской региональной ассоциации Учебно-научный центр. Серия: Науки о Земле. 2006. № 2(8). С. 134-139.
9. Паровик Р.И. Модель нестационарной диффузии-адвекции радона системе грунт-атмосфера // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2010. № 1(1). С. 39-45.
10. Etiope G., Martinelli G. Migration of carrier and trace gases in the geosphere: an overview // Physics of The Earth and Planetary Interiors. 2002. V. 129. P. 185–204.
11. Parovik, R. I., Shevtsov B.M. Radon transfer processes in fractional structure medium // Mathematical Models and Computer Simulations. 2010. Vol. 2, No. 2. P. 180-185. DOI 10.1134/S2070048210020055.
12. Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. М: Едиториал УРСС, 2002. 112 с.
13. Паровик Р. И. Математические модели неклассической теории эманационного метода. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2014. 80 с.
14. Паровик Р.И., Шевцов Б.М., Фирстов П.П. Модель переноса радона (222Rn) в режиме супердиффузии во фрактальной среде // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2008. Т. 10, № 2. С. 79-85.
15. Спивак А.А., Сухоруков М.В., Харламов В.А. Особенности эманации радона ^{222}Rn с глубиной // Доклады РАН. 2008. Т. 420, № 6. С. 825-828.

ARALASH UCHBURCHAKLI SOHADA PARABOLIK-GIPERBOLIK TIPDAGI UCHINCHI TARTIBLI TENGLAMA UCHUN BITTA CHEGARAVIY MASALANI TADQIQ ETISH

Adxamjonova Xusnidabonu Dilmurod qizi
Qo‘qon davlat universiteti 2-bosqich magistranti
https://doi.org/10.5281/zenodo.20594882

Annotatsiya. *Ushbu maqolada uchinchi tartibli parabolik-giperbolik tipdagi bitta tenglama aralash uchburchakli sohada tadqiq etildi hamda yechimning mavjudligi va yagonaligi isbotlandi.*

Аннотация. *В данной статье исследовано единственное уравнение параболическо-гиперболического типа третьего порядка в смешанной треугольной области, и доказано существование и единственность его решения.*

Abstract

In this article, a single equation of the third order parabolic-hyperbolic type in a mixed triangular domain was investigated and the existence and uniqueness of the solution were proven.

Ushbu maqolada xOy tekislikning aralash uchburchakli G sohasida uchinchi tartibli parabolik-giperbolik tipdagi

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+c\right)\left(Lu\right)=0 \qquad (1)$$

tenglama uchun bitta chegaraviy masala qo‘yiladi, bunda

$$Lu=\begin{cases} u_{1xx}-u_{1y}, & (x,y)\in G_1, \\ u_{ixx}-u_{iyy}, & (x,y)\in G_i \quad (i=2,3), \end{cases} \quad c\in R,\ u(x,y)=u_i(x,y),\ (x,y)\in G_i \quad (i=1,2,3),$$

$$G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup J_1\cup J_2,\ G_1=\left\{(x,y)\in R^2: 0<x<1,\ 0<y<1\right\},$$

$$G_2=\left\{(x,y)\in R^2: -1<y<0,\ -y<x<1\right\},\quad G_3=\left\{(x,y)\in R^2: -1<x<0,\ -x<y<1\right\},$$

$$J_1=\left\{(x,y)\in R^2: y=0,\ 0<x<1\right\},\ J_2=\left\{(x,y)\in R^2: x=0,\ 0<y<1\right\},$$

ya’ni G_1 uchlari $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$ nuqtalarda bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak; G_2 uchlari A, B, $C(1,-1)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak; G_3 uchlari A, $D(-1,1)$, A_0 nuqtalarda bo‘lgan uchburchak; J_1 uchlari A, B nuqtalarda bo‘lgan ochiq kesma; J_2 uchlari A, A_0 nuqtalarda bo‘lgan ochiq kesma.

Bizga G_i $(i=2,3)$ sohalarni quyidagi ko‘rinishda yozib olish kerak bo‘ladi (ulardan biz kelgusida foydalanamiz): $G_2=G_{21}\cup G_{22}\cup BE_1$, $G_3=G_{31}\cup G_{32}\cup A_0E_2$, bunda G_{21} – uchlar A, B, $E_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak; G_{22} – uchlari B, C, E_1 nuqtalarda bo‘lgan uchburchak; G_{31} – uchlari A, A_0, $E_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak; G_{32} – uchlari

A_0, D, E_2 nuqtalarda bo‘lgan uchburchak; BE_1 – uchlari B, E_1 nuqtalarda bo‘lgan ochiq kesma; A_0E_2 – uchlari A_0, E_2 nuqtalarda bo‘lgan ochiq kesma, ya’ni

$$G_{21}=\left\{(x,y)\in R^2:-\frac{1}{2}<y<0,\ -y<x<y+1\right\},$$

$$G_{22}=\left\{(x,y)\in R^2:\frac{1}{2}<x<1,-x<y<x-1\right\},\qquad G_{31}=\left\{(x,y)\in R^2:-\frac{1}{2}<x<0,\ -x<y<x+1\right\},$$

$$G_{32}=\left\{(x,y)\in R^2:\frac{1}{2}<y<1,\ -y<x<y-1\right\},\qquad BE_1=\left\{(x,y)\in R^2:\frac{1}{2}<x<1,y=x-1\right\},$$

$$A_0E_2=\left\{(x,y)\in R^2:-\frac{1}{2}<x<0,y=x+1\right\}.$$

Masala: Shunday $u(x,y)$ funksiya topilsinki, u 1) $\overline{G}$ yopiq sohada uzluksiz; 2) (1) tenglamani ochiq G sohada $x\neq 0,\ y\neq 0$ bolganda qanoatlantiradi; 3) quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi:

$$u(1,y)=\varphi_1(y),\quad 0\le y\le 1, \qquad (2)$$

$$u(1,y)=\varphi_2(y),\ -1\le y\le 0, \qquad (3)$$

$$u\big|_{AE_1}=\psi_1(x),\ 0\le x\le\frac{1}{2}, \qquad (4)$$

$$u\big|_{AE_2}=\psi_2(x),\ -\frac{1}{2}\le x\le 0, \qquad (5)$$

$$u_3(x,1)=f_1(x),\ -1\le x\le 0, \qquad (6)$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_3(x),\ 0\le x\le 1, \qquad (7)$$

$$\left.\frac{\partial u_3}{\partial n}\right|_{AD}=\psi_4(x),\ -1\le x\le 0; \qquad (8)$$

va 4) tur o‘zgarish chizig‘ida ushbu ulash shartlarini qanoatlantiradi:

$$u_1(x,0)=u_2(x,0)=\tau_1(x),\ 0\le x\le 1, \qquad (9)$$

$$u_{1y}(x,0)=u_{2y}(x,0)=\nu_1(x),\ 0\le x\le 1, \qquad (10)$$

$$u_{1yy}(x,0)=u_{2yy}(x,0)=\mu_1(x),\ 0\le x\le 1, \qquad (11)$$

$$u_1(0,y)=u_3(0,y)=\tau_2(y),\ 0\le y\le 1, \qquad (12)$$

$$u_{1x}(0,y)=u_{3x}(0,y)=\nu_2(y),\ 0\le y\le 1, \qquad (13)$$

$$u_{1xx}(0,y)=u_{3xx}(0,y)=\mu_2(y),\ 0\le y\le 1. \qquad (14)$$

Bunda $\varphi_i(i=1,2),\psi_j(j=1,2,3,4),f_1$ – berilgan yetarli silliq funksiyalar, $\tau_i,\nu_i,\mu_i(i=1,2)$ lar esa hozircha noma’lum yetarli silliq funksiyalar, shu bilan birga $\tau_1(1)=\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$, $\psi_2(-1)=f_1(-1)$, $\varphi_2(-1)=\psi_1(1)$, $\psi_3(0)=\psi_4(0)$ kelishish shartlari bajariladi, $n-$ ushbu $x+y=0$ to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan ichki normal.

Teorema. Agar $\varphi_1 \in C^3[0,1]$, $\varphi_2 \in C^3[-1,0]$, $\psi_1 \in C^3\left[\frac{1}{2},1\right]$, $\psi_2 \in C^3\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$, $\psi_3 \in C^2[0,1]$, $\psi_4 \in C^2[-1,0]$, $f_1 \in C^3[-1,0]$ bo‘lib, shu bilan birga $\tau_1(1)=\varphi_2(0)=\varphi_1(0)$, $f_1(-1)=\psi_2(-1)$, $\tau_1'(1)=\nu_3(0)$, $\varphi_2(-1)=\psi_1(1)$, $\tau_1''(1)=\varphi_2''(0)+\sqrt{2}\psi_3'(1)\exp\left(-\frac{c}{b}\right)$, $\psi_3(0)=\psi_4(0)$ kelishish shartlari bajarilsa, u holda M_{11c}^3 masala yagona yechimga ega bo‘ladi.

Isbot. Teoremani yechimni qurish usuli yordamida isbot qilamiz. Buning uchun (1) tenglamani

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_1(x-y)e^{-cy},\ (x,y)\in G_1, \qquad (15)$$

$$u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_i(x-y)e^{-cy},\ (x,y)\in G_i\ \ (i=2,3), \qquad (16)$$

ko‘rinishda yozib olamiz, bunda $u(x,y)=u_i(x,y),\ (x,y)\in G_i\ \left(i=\overline{1,3}\right)$ belgilash kiritildi, shuningdek, $\omega_i(x-y)\left(i=\overline{1,3}\right)$ – hozircha noma’lum yetarlicha silliq funksiyalar.

$G_i\ (i=2,3)$ sohalarning yuqorida yozilgan ko‘rinishlarini e’tiborga olib, (16) $(i=2,3)$ tenglamani

$$u_{ikxx}-u_{ikyy}=\omega_{ik}(x-y)e^{-cy},\ (x,y)\in G_{ik}\ \ (i=2,3;\ k=1,2) \qquad (17)$$

ko‘rinishda yozib olamiz, bunda $u_i(x,y)=u_{ik}(x,y)$, $\omega_i(x-y)=\omega_{ik}(x-y)$, $(x,y)\in G_{ik}\ (i=2,3;\ k=1,2)$ belgilashlar kiritildi.

Avvalo masalani G_{21} sohada qaraymiz. (17) $(i=2;\ k=1)$ tenglamaning (9), (10) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi

$$u_{21}(x,y)=\frac{\tau_1(x+y)+\tau_1(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\nu_1(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^y e^{-c\eta}d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\omega_{21}(\xi-\eta)d\xi \qquad (18)$$

ko‘rinishga ega. (18) ni x va y bo‘yicha differensiallab,

$$u_{21x}(x,y)=\frac{\tau_1'(x+y)+\tau_1'(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\left[\nu_1(x+y)-\nu_1(x-y)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^y e^{-c\eta}\left[\omega_{21}(x+y-2\eta)-\omega_{21}(x-y)\right]d\eta, \qquad (19)$$

$$u_{21y}(x,y)=\frac{\tau_1'(x+y)-\tau_1'(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\left[\nu_1(x+y)+\nu_1(x-y)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^y e^{-c\eta}\left[\omega_{21}(x+y-2\eta)+\omega_{21}(x-y)\right]d\eta \qquad (20)$$

ni olamiz.

(7) shartni AE_1 da ushbu ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\left(\frac{\partial u_{21}}{\partial x}+\frac{\partial u_{21}}{\partial y}\right)\Bigg|_{AE_1}=\sqrt{2}\psi_3(x),\ 0\le x\le\frac{1}{2}. \qquad (21)$$

(19) va (20) ni (21) ga qo‘yib, ba’zi hisoblashlardan so‘ng

$$\omega_{21}(x-y)=\sqrt{2}\psi_3'\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{-\frac{c(x-y)}{2}},\ 0\le x-y\le 1 \qquad (22)$$

ni olamiz.

Endi (18) ni (4) shartga qo‘yib, ba’zi soddalashtirishlardan so‘ng tur o‘zgarish chizig‘i J_1 da yechimning noma’lum izlari orasida birinchi munosabatni olamiz:

$$\tau_1'(x)+\nu_1(x)=\alpha_1(x),\ 0\le x\le 1, \qquad (23)$$

bunda $\alpha_1(x)=\psi_1'\left(\frac{x}{2}\right)-\omega_{21}(x)\int\limits_0^{-\frac{x}{2}} e^{-cy}d\eta \equiv \begin{cases}\psi_1'\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{c}\omega_{21}(x)\left(e^{\frac{cx}{2}}-1\right), & c\neq 0,\\ \psi_1'\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}\omega_{21}(x), & c=0,\end{cases}$ $\omega_{21}(x)$ esa ma’lum funksiya bo‘lib, u (22) formula orqali topilgan.

(1) tenglamani G_1 sohada ushbu ko‘rinishda yozib olamiz:

$$u_{1xxx}-u_{1xy}+u_{1xxy}-u_{1yy}+cu_{1xx}-cu_{1y}=0.$$

Bu tenglamada $y\to 0$ deb limitga o‘tib, tur o‘zgarish chizig‘i J_1 da yechimning izlari orasida ikkinchi munosabatni olamiz:

$$\tau_1'''(x)-\nu_1'(x)+\nu_1''(x)-\mu_1(x)+c\tau_1''(x)-c\nu_1(x)=0,\ 0\le x\le 1. \qquad (24)$$

Endi (17) $(i=2;\ k=1)$ tenglamada $y\to 0$ deb limitga o‘tib, tur o‘zgarish chizig‘i J_1 da yechimning izlari orasida uchinchi munosabatni olamiz:

$$\tau_1''(x)-\mu_1(x)=\omega_{21}(x),\ 0\le x\le 1. \qquad (25)$$

(23), (24) va (25) tenglamalardan $\nu_1(x)$ va $\mu_1(x)$ funksiyalarni yo‘qotib, $\tau_1(x)$ ga nisbatan uchinchi tartibli oddiy differensial tenglama olamiz va bu olingan tenglamani 0 dan x gacha integrallab, ushbu tenglamaga kelamiz:

$$\tau_1''(x)-\left(1-\frac{c}{2}\right)\tau_1'(x)-\frac{c}{2}\tau_1(x)=\frac{1}{2}\alpha_2(x)+\frac{k_1}{2},\ 0\le x\le 1, \qquad (26)$$

bunda $\alpha_2(x)=\alpha_1'(x)-\alpha_1(x)-\int\limits_0^x\left[\omega_{21}(t)+c\alpha_1(t)\right]dt$, k_1 esa hozircha noma’lum son.

(26) tenglamani yechishda uchta hol bo‘lishi mumkin: 1°. $0\neq c\neq -2$; 2°. $c=-2$; 3°. $c=0$.

1° $0\neq c\neq -2$ holni qaraymiz. Bu holda (26) tenglamaning xarakteristik tenglamasi turli haqiqiy ildizlarga ega: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-\frac{c}{2}$. Bu holda (26) tenglamaning umumiy yechimini

$$\tau_1(x)=C_1(x)e^{x}+C_2(x)e^{-\frac{cx}{2}} \qquad (27)$$

ko‘rinishda izlaymiz (Bu yerda biz o‘zgarmaslarni variatsiyalash usulini qo‘llaymiz). U holda $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funksiyalarni topish uchun ushbu tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases}C_1'(x)e^{x}-C_2'(x)\frac{c}{2}e^{-\frac{cx}{2}}=\frac{1}{2}\alpha_2(x)+\frac{1}{2}k_1,\\ C_1'(x)e^{x}+C_2'(x)e^{-\frac{cx}{2}}=0.\end{cases}$$

Bu sistemani yechib,

$$C_2'(x)=-\frac{1}{2+c}\left[\alpha_2(x)+k_1\right]e^{\frac{cx}{2}},\quad C_1'(x)=\frac{1}{2+c}\left[\alpha_2(x)+k_1\right]e^{-x}$$

larni topamiz. Bu tengliklarni 0 dan x gacha integrallab,

$$C_2(x)=-\frac{1}{2+c}\int_0^x e^{\frac{ct}{2}}\alpha_2(t)\,dt-\frac{2}{c}\cdot\frac{k_1}{2+c}\left[e^{\frac{cx}{2}}-1\right]+k_3,$$

$$C_1(x)=\frac{1}{2+c}\int_0^x e^{-t}\alpha_2(t)\,dt-\frac{k_1}{2+c}\left(e^{-x}-1\right)+k_2$$

larga ega bo‘lamiz, bunda k_2,k_3 lar hozircha noma’lum sonlar. $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funksiyalarning bu qiymatlarini (27) ga qo‘yib, ushbuga ega bo‘lamiz:

$$\tau_1(x)=\frac{1}{2+c}\int_0^x\left[e^{x-t}-e^{\frac{c}{2}(t-x)}\right]\alpha_2(t)\,dt-\frac{k_1}{2+c}\left[\frac{2}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{2}x}\right)+1-e^{x}\right]+k_2e^{x}+k_3e^{-\frac{c}{2}x}.$$

Endi ushbu

$$\tau_1(0)=\psi_1(0),\quad \tau_1'(0)=\frac{1}{2}\psi_1'(0)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_3(0),\quad \tau_1(1)=\varphi_2(0)\qquad(28)$$

shartlarni qanoatlantirib,

$$k_2=\frac{1}{2+c}\left[c\psi_1(0)+\psi_1'(0)+\sqrt{2}\psi_3(0)\right],\quad k_3=\frac{1}{2+c}\left[2\psi_1(0)-\psi_1'(0)-\sqrt{2}\psi_3(0)\right],$$

$$k_1=\frac{c}{2\left(1-e^{-\frac{c}{2}}\right)+1-e}\left\{(c+2)\varphi_2(0)-\int_0^1\left[e^{1-t}-e^{\frac{c}{2}(t-1)}\right]\alpha_2(t)\,dt-(c+2)\left(k_2e+k_3e^{-\frac{c}{2}}\right)\right\}$$

larni topamiz.

Endi 2° $c=-2$ holni qaraymiz. Bu holda (26) tenglama

$$\tau_1''(x)-2\tau_1'(x)+\tau_1(x)=\frac{1}{2}\alpha_2(x)+\frac{1}{2}k_1,0\le x\le 1\qquad(29)$$

ko‘rinishni oladi.

(29) tenglamaning xarakteristik tenglamasi bitta ikki karrali $\lambda_{1,2}=1$ haqiqiy ildizga ega. U holda (29) tenglamaning umumiy yechimini

$$\tau_1(x)=\left[C_1(x)+xC_2(x)\right]e^{x}\qquad(30)$$

ko‘rinishda izlaymiz (Bunda biz o‘zgarmaslarni variatsiyalash usulidan foydalandik). Bu holda $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funksiyalarni aniqlash uchun

$$\begin{cases}C_2'(x)+\left[C_1'(x)+xC_2'(x)\right]=\dfrac{1}{2}\left[\alpha_2(x)+k_1\right]e^{-x},\\ C_1'(x)+xC_2'(x)=0\end{cases}$$

sistemani olamiz. Bu sistemani yechib, $C_1'(x)$ va $C_2'(x)$ funksiyalarni topamiz. Bu funksiyalarni 0 dan x gacha integrallab, ushbularga ega bo‘lamiz:

$$C_1(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x te^{-t}\alpha_2(t)\,dt+\frac{k_1}{2}\left[(x+1)e^{-x}-1\right]+k_2,$$

$$C_2(x)=\frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\alpha_2(t)\,dt-\frac{k_1}{2}\left(e^{-x}-1\right)+k_3,$$

bunda k_2, k_3 lar hozircha noma’lum sonlar. $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funksiyalarning qiymatlarini (30) ga qo‘yib,

$$\tau_1(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)e^{x-t}\alpha_2(t)dt+\frac{k_1}{2}\left[1+(x-1)e^x\right]+(k_2+xk_3)e^x$$

ga ega bo‘lamiz.

(28) shartlarni qanoatlantirib,

$$k_2=\psi_1(0), \qquad k_3=\frac{1}{2}\psi_1'(0)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_3(0)-\psi_1(0),$$

$$k_1=2\varphi_2(0)-\int_0^1 (1-t)e^{1-t}\alpha_2(t)dt-e\left[\psi_1'(0)+\sqrt{2}\psi_3(0)\right]$$

larni topamiz.

Va nihoyat, 3° $c=0$ holni qaraymiz. Bu holda

$$\tau_1''(x)-\tau_1'(x)=\frac{1}{2}\left[\alpha_2(x)+k_1\right], 0\le x\le 1$$

tenglamani olamiz. Bu tenglamani 0 dan x gacha integrallab,

$$\tau_1'(x)-\tau_1(x)=\alpha_3(x)+\frac{k_1}{2}x+k_2, 0\le x\le 1$$

ga ega bo‘lamiz. bunda $\alpha_3(x)=\frac{1}{2}\int_0^x \alpha_2(t)dt$, k_1, k_2 lar esa hozircha noma’lum o‘zgarmas sonlar. Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$\tau_1(x)=\int_0^x e^{x-t}\alpha_3(t)dt+\frac{k_1}{2}\left[e^x-(x+1)\right]+k_2\left(e^x-1\right)+k_3e^x$$

ko‘rinishga ega. bunda k_3 hozircha noma’lum o‘zgarmas son. (28) shartlarni qanoatlantirib, ushbularni topamiz:

$$k_3=\psi_1(0), \qquad k_2=\frac{1}{2}\psi_1'(0)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_3(0)-\psi_1(0),$$

$$k_1=\frac{2}{e-2}\left[\varphi_2(0)-\int_0^1 e^{1-t}\alpha_3(t)dt-k_2(e-1)-k_3e\right].$$

Shunday qilib, biz $\tau_1(x)$ ni, va demak, $\nu_1(x)$ hamda $u_{21}(x,y)$ funksiyalarni ham aniqladik.

Endi D_{22} sohaga o‘tamiz. (17) $(i=2;\ k=2)$ tenglamaning (3) va $u_{22x}(1,y)=\nu_3(y)$ ($\nu_3(y)$ – hozircha noma’lum funksiya) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini yozib olamiz:

$$u_{22}(x,y)=\frac{\varphi_2(y+x-1)+\varphi_2(y-x+1)}{2}+\frac{1}{2}\int_{y-x+1}^{y+x-1}\nu_3(t)dt+\frac{1}{2}\int_1^x d\eta\int_{y-x+\eta}^{y+x-\eta}e^{-c\xi}\omega_{22}(\eta-\xi)d\xi. \quad (31)$$

(31) ni x va y bo‘yicha differensiallab,

$$u_{22x}(x,y)=\frac{\varphi_2'(y+x-1)-\varphi_2'(y-x+1)}{2}+\frac{1}{2}\left[\nu_3(y+x-1)+\nu_3(y-x+1)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\int_1^x\left[\omega_{22}(2\eta-(y+x))e^{-c(y+x-\eta)}+\omega_{22}(x-y)e^{-c(y-x+\eta)}\right]d\eta, \qquad (32)$$

$$u_{22y}(x,y)=\frac{\varphi_2'(y+x-1)+\varphi_2'(y-x+1)}{2}+\frac{1}{2}\left[\nu_3(y+x-1)-\nu_3(y-x+1)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\int_1^x\left[\omega_{22}(2\eta-(y+x))e^{-c(y+x-\eta)}-\omega_{22}(x-y)e^{-c(y-x+\eta)}\right]d\eta \qquad (33)$$

larga ega bo‘lamiz.

E_1C dagi (7) shartni

$$\left(\frac{\partial u_{22}}{\partial x}+\frac{\partial u_{22}}{\partial y}\right)\Bigg|_{E_1C}=\sqrt{2}\psi_3(x),\ \frac{1}{2}\le x\le 1 \qquad (34)$$

ko‘rinishda yozib olamiz. (32) va (33) ni (34) ga qo‘yib, ba’zi almashtirishlardan so‘ng

$$\omega_{22}(x-y)=\sqrt{2}\psi_3'\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{-\frac{c(x-y)}{2}},\ 1\le x-y\le 2$$

ni topamiz.

Endi $u_{22}\big|_{y=x-1}=u_{21}\big|_{y=x-1}$ shartdan foydalanamiz. $u_{21}(x,x-1)=h_1(x)$ belgilash kiritamiz. U holda $u_{22}(x,y)$ funksiyani topish uchun

$$u_{22}(x,x-1)=h_1(x) \qquad (35)$$

shartni hosil qilamiz. (31) ni (35) shartga qo‘yib, $\nu_3(y)$ funksiyani topamiz:

$$\nu_3(y)=h_1'\left(\frac{y+2}{2}\right)-\psi_2'\left(\frac{y+2}{2}\right)-\int_1^{\frac{y+2}{2}}\omega_{22}(2\eta-y-1)\exp\left[-c(y+1-\eta)\right]d\eta,\ -1\le y\le 0.$$

Shunday qilib, biz $u_{22}(x,y)$ funksiyani ham topdik va demak, $u_2(x,y)$ funksiya G_2 sohada topildi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, Фан, 1986, 220с.
2. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент, Фан, 1974, 156 с.
3. Mamajonov M., Shermatova X.M. On a boundary value problem for a third-order equation of the parabolic-hyperbolic type in a triangular domain with three type change lines. Journal of applied and industrial mathematics. 16, 481–489 (2022).
4. Шерматова, Х. М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в смешанной пятиугольной области, когда угловой коэффициент характеристики оператора первого порядка меньше минус единицы. Наманган давлат университети илмий хабарномаси. №7. ISSN: 2181-0427. Наманган. 46-54, 2019.
5. Shermatova, Kh. M. Investigation of a boundary value problem for a third order parabolic-hyperbolic equation. Scientific Bulletin of Namangan State University, 1(2.6), 9-16,2019.

AMALIY MASALALARNING KASR TARTIBLI HOSILALI FUNKSIONALLARI

Akbarov Ummatali Yigitaliyevich
Qo`qon davlat universiteti dotsent, akbarov.ummatali1961@gmail.com
ORSID: 0009-0007-1476-8642.
https://doi.org/10.5281/zenodo.20594899

Annotatsiya. *Maqolada xotira va irsiy xossalarga ega bo`lgan qovushqoq elastikning amaliy masalalarini funksiyalarning kasr tartibli hosilasi qatnashgan funksionallar va kasr tartibli differensial tenglamalar bilan modellashtirilishi ko`rsatib o`tilgan. Funksiyalarning kasr tartibli hosilasi qatnashgan ayrim funksionallarning ekstremumga ega bo`lishining zaruriy shartlarini keltirib chiqarilgan va mos Eyler–Lagranj tenglamalari hosil qilingan hamda amaliy ahamiyatga ega bo`lgan ayrim masalalar ko`rib chiqilgan.*
Kalit so‘zlar: *funksional**,** kasr tartibli variatsion hisob, kasr tartibli hosila, kasr tartibli* ***integral,*** *kasr tartibli differensial tenglama, funksional ekstremumi, Eyler–Lagranj tenglamasi, qovushqoq elastiklik nazariyasi.*
Аннотация. *В статье рассмотрены функционалы, содержащие дробные производные функций, выведены необходимые условия существования экстремума, получены соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа, а также рассмотрены некоторые задачи, имеющие практическое значение.*
Ключевые слова: *функционал, дробный вариационный исчисление, дробная производная, дробный интеграл, дробное дифференциальное уравнение, экстремум функционала, уравнение Эйлера–Лагранжа, теория вязкоупругости.*
Abstract. *The article considers functionals involving fractional derivatives of functions, derives the necessary conditions for the existence of extrema, obtains the corresponding Euler–Lagrange equations, and examines several problems of practical significance.*
Keywords: *functional, fractional calculus of variations, fractional derivative, fractional integral, fractional differential equation, extremum of a functional, Euler–Lagrange equation, viscoelasticity theory.*

Ma’lumki, differensial tenglamalar fan va texnikaning ko`plab amaliy masalalarini matematik ifodalashda foydalaniladi va ularni keltirib chiqarishning juda ko`p matematik vositalari mavjud. Shunday vositalardan biri variatsion hisobdir. So`ngi yillarda kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasi jadal rivojlanmoqda va ular ham ko`plab amaliy masalalarning matematik modeli hisoblanadi. Bunday differensial tenglamalarga mos funksionallarni umumiy ko`rinishi, ular qanday ko`rinishdagi Eyler–Lagranj tenglamalaridan kelib chiqadi degan savollarga javob berish ham muhimdir. Shuning uchun ushbu ishda kasr tartibli variatsion hisob ya’ni funksiyalarning kasr tartibli hosilasi qatnashgan funksionallar, ularning ekstremumga ega bo`lishining zaruriy shartlarini keltirib chiqarish va mos Eyler–Lagranj tenglamalarini hosil qilish masalalar bilan shug`ullanamiz.

Mavzuga tegishli asosiy tushunchalarni [1-4] adabiyotlardan topish mumkin. Mavzuga yaqin bo`lgan eng yangi ishlar sifatida [5-9] adabiyotlarni ko`rsatish mumkin.

Ko`plab adabiyotlarda kasr tartibli hosila tushunchasi kasr tartibli integral tushunchasiga teskari amal sifatida kiritiladi. Biz ham avval kasr tartibli integral tushunchasini kiritib, so`ngra kasr tartibli hosila tushunchasini ko`ramiz[1,3,8,9].

Ta’rif. Agar $\varphi(x)\in L_1(a,b)$ bo`lsa, u holda quyidagi ko`rinishdagi integrallar

$$\left(I_{a+}^{\alpha}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\varphi(t)}{\left(x-t\right)^{1-\alpha}}dt,\ x>a, \qquad (1)$$

va

$$\left(I_{b-}^{\alpha}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b\frac{\varphi(t)}{\left(t-x\right)^{1-\alpha}}dt,\ x<b, \qquad (2)$$

mos ravishda Riman-Liuvillnig o`ng tomonlama va chap tomonlama α kasr tartibli integrali deyiladi, bu yerda $\alpha>0$, $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ - gamma funksiya. Bu funksiyaning qiymatlar jadvali mavjud. Ushbu funksiyaning xossalari, qiymatlar jadvali haqidagi ma’lumotlarni Internet saytlari va maxsus funksiyalar yoritilgan adabiyotlardan topish mumkin. Bundan tashqari bu funksiya qiymatlarini Maple va boshqa matematik sistemalar yordamida ham hisoblash mumkin.

Agar $a=0$ desak, o`ng tomonlama $\alpha$ kasr tartibli integral quyidagi ko`rinishda yoziladi

$$\left(I_{0+}^{\alpha}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{\varphi(t)}{\left(x-t\right)^{1-\alpha}}dt\ .$$

Kasr tartibli hosila kasr tartibli integralga teskari amal sifatida aniqlanadi. Buning uchun ushbu

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\varphi(t)}{\left(x-t\right)^{1-\alpha}}dt,\ x>a,$$

Abel tenglamasining

$$\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{f(t)}{\left(x-t\right)^{\alpha}}dt\ ,\ 0<\alpha<1$$

yechimidan foydalaniladi.

Shu yerda ta’kidlash lozimki, kasr tartibli hosilaning Riman-Liuvill va Kaputo (va x.k) ma’nosidagi ta’riflari mavjud.

Ta’rif. $[a,b]$ kesmada berilgan $f(x)$ funksiya uchun ushbu

$$\left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{f(t)}{\left(x-t\right)^{\alpha}}dt\ , \qquad (3)$$

va

$$\left(D_{b-}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b\frac{f(t)}{\left(t-x\right)^{\alpha}}dt\ ,\ 0<\alpha<1 \qquad (4)$$

formulalar mos ravishda Riman-Liuvill ma’nosidagi chap tomonlama va o`ng tomonlama α kasr tartibli hosila deyiladi. Riman-Liuvill ma’nosidagi hosila uchun $D_{RL}^{\alpha}f(x)$ belgi ham ishlatiladi.

$\alpha>0,\ n=[\alpha]+1$ - α dan kichik bo`lmagan eng kichik butun son bo`lsin.

Ta’rif. Kaputo ma’nosidagi α kasr tartibli hosila deb

$${}^{C}D^{\alpha}f(x)=J^{n-\alpha}\left(f^{(n)}(x)\right)$$

formulaga aytiladi, bu yerda $J^{\beta}g(x)=\left(I_{0+}^{\beta}g(x)\right)$ - Riman-Liuvill ma’nosidagi $\beta>0$ kasr tartibli integral:

$$J^{\beta}g(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\beta-1}g(t)dt.$$

Kaputo ma’nosidagi kasr tartibli hosilani aniqlash uchun asosiy shart $f^{(k)}(0),\ k=0,1,2,...,n-1$ oddiy hosilalarni mavjudligi va chekli bo`lishidir. Bular Kaputo ma’nosidagi kasr tartibli hosila ishtirok etadigan muammolarda boshlang`ch shart sifatida ishtirok etadi.

Qulaylik uchun Riman-Liuvill va Kaputo ma’nosidagi kasr tartibli hosilalar quyidagicha belgilanadi ($0<\alpha<1$):

$$D_{RL}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}(x-t)^{-\alpha}f(t)dt,$$

$$D_{C}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{-\alpha}f'(t)dt.$$

Ma’lumki, variatsion hisob nazariyasida funksiyaning butun tartibli hosilalariga bog`liq bo`lgan ko`plab funksionallar o`rganiladi[10-14], jumladan eng sodda funksional

$$J[y]=\int_{a}^{b}F\left(x,y(x),y'(x)\right)dx$$

ko`rinishdadir.

Endi yuqoridagi ko`rinishga ega bo`lgan funksionallarni funksiyaning kasr tartibli hosilalariga bog`liq bo`lgan funksionallarini ko`rib o`tamiz.

Ta’rif. Ushbu ko`rinishdagi

$$J[y]=\int_{a}^{b}F\left(x,y(x),{}^{C}D_{a+}^{\alpha}y(x)\right)dx,\ 0<\alpha<1$$

funksional funksiyaning Kaputo tipidagi kasr tartibli hosilalasi qatnashgan funksional deyiladi, bu yerda, $y(x)$ - qidirilayotgan funksiya, ${}^{C}D_{a+}^{\alpha}$ - Kaputo ma’nosidagi kasr tartibli hosila, F - Lagranj funksiyasi.

Agar y(a)=y(b)=0 bo‘lsa, u holda funksionalga mos Eyler-Lagranj tenglamasi

$$\frac{\partial F}{\partial y}+{}_{x}D_{b-}^{\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}y\right)}\right)=0$$

ko`rinishda bo`ladi va u kasr tartibli hosilali Eyler-Lagranj tenglamasi deyiladi.

Misol uchun agar funksional

$$J[y]=\frac{1}{2}\int_a^b \left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}y(x)\right)^2 dx$$

ko`rinishda bo`lsa, u holda

$$\frac{\partial F}{\partial\left({}^{C}D^{\alpha}y\right)}={}^{C}D^{\alpha}y$$

bo`lib, funksionalga mos Eyler-Lagranj tenglamasi

$${}_{x}D_{b-}^{\alpha}\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}y\right)=0$$

bo`ladi. Bu kasr tartibli hosilali differensial tenglamadan iborat. Tenglamani chap tomonini kasr tartibli Laplas operatori ham deyiladi. Shuning uchun, tenglamani kasr tartibli Laplas tenglamasi deyish mumkin.

Ta’rif. Ushbu ko`rinishdagi

$$J[y]=\int_a^b F\left(x,y,D_{a+}^{\alpha}y\right)dx$$

funksional funksiyaning Riman-Liuvill tipidagi kasr tartibli hosilalasi qatnashgan funksional deyiladi, bu yerda, $y(x)$ - qidirilayotgan funksiya, D_{a+}^{α} - Riman-Liuvill ma’nosidagi kasr tartibli hosila, F - Lagranj funksiyasi.

Ushbu funksionalga mos Eyler-Lagranj tenglamasi

$$\frac{\partial F}{\partial y}+{}_{x}D_{b-}^{\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)}\right)=0$$

ko`rinishda bo`ladi. Bu yerda, **boshlang‘ich shartlar** talqini murakkabroq va alohida masala hisoblanadi. Shuning uchun bu haqida to`htalmaymiz.

Ta’rif. Ushbu ko`rinishdagi

$$J[y]=\int_a^b F\left(x,y,{}^{C}D^{\alpha}y,{}^{C}D^{\beta}y\right)dx,\ 0<\alpha<\beta<1$$

funksional funksiyaning yuqori tartibli Kaputo tipidagi kasr tartibli hosilalasi qatnashgan funksional deyiladi, bu yerda, $y(x)$ - qidirilayotgan funksiya, ${}^{C}D^{\alpha}$ va ${}^{C}D^{\beta}$ - Kaputo ma’nosidagi kasr tartibli hosilalar, F - Lagranj funksiyasi.

Ushbu funksionalga mos Eyler-Lagranj tenglamasi

$$\frac{\partial F}{\partial y}+{}_{x}D_{b}^{\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial\left({}^{C}D^{\alpha}y\right)}\right)+{}_{x}D_{b}^{\beta}\left(\frac{\partial F}{\partial\left({}^{C}D^{\beta}y\right)}\right)=0$$

ko`rinishda bo`ladi.

Klassik hosila, ya’ni butun tartibli va kasr tartibli hosilalar qatnashgan funksionallar tushunchasini ham kiritish mumkin.

Ta’rif. Ushbu ko`rinishdagi

$$J[y]=\int_a^b F\left(x,y(x),\ y'(x),\ldots,y^{(n)}(x),{}^{C}D_{a+}^{\alpha}y(x)\right)dx,\ 0<\alpha<1$$

funksional funksiyaning oddiy hosilalari va Kaputo tipidagi kasr tartibli hosilalasi qatnashgan (gibrid) funksional deyiladi, bu yerda, $y(x)$ - qidirilayotgan funksiya, ${}^{C}D_{a+}^{\alpha}$ - Kaputo ma’nosidagi kasr tartibli hosila, F - Lagranj funksiyasi.

Misol. $n=2$ uchun.

$$J[y]=\int_a^b\left[\left({}^{C}D^{\alpha}y\right)^2+\mu(y'')^2\right]dx,\ 0<\alpha<1.$$

Bu funksionalga mos Eyler-Lagranj tenglamasi

$${}_xD_b^{\alpha}\left({}^{C}D_a^{\alpha}y\right)+\mu\frac{d^4y}{dx^4}=0$$

bo`ladi. Bu to`rttinchi tartibli kasr atrtibli hosila qatnashgan differensial tenglama bo`lib, **xotirali elastik (qovushqoq elastik) tizimlarga doir ayrim amaliy masalalarni matematik modelini ifodalaydi.**

Yuqorida bayon qilinganlardan kelib chiqib quyidagicha xulosa qilish mumkin: Kasr tartibli Eyler–Lagranj tenglamasi hosil bo‘lishi uchun funksional ifodasida funksiyaning Kaputo yoki Riman–Liuvill ma’nosidagi kasr tartibli hosilasi ishtirok etishi zarur. Variatsiyalash jarayonida kasr tartibli integrallash bo‘yicha qismlarga ajratish formulasidan foydalaniladi, natijada klassik Eyler–Lagranj tenglamasining kasr tartibli analogi olinadi. Va aksincha, qaralayotgan funksional ifodasida funksiyaning Caputo yoki Riman–Liuvill ma’nosidagi kasr tartibli hosilasi ishtirok etsa, uning Eyler–Lagranj tenglamasi kasr tartibli differensial tenglamadan iborat bo`ladi.

Yuqorida Kaputo tipidagi kasr tartibli hosilalasi qatnashgan

$$J[y]=\int_a^b F\left(x,y(x),{}^{C}D_{a+}^{\alpha}y(x)\right)dx,\ 0<\alpha<1$$

funksionalga mos Eyler-Lagranj tenglamasi

$$\frac{\partial F}{\partial y}+{}_xD_{b-}^{\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}y\right)}\right)=0$$

bo`lishi aytilgan edi. Endi shuni teorema sifatida shakllantiramiz.

Teorema. Bizga Kaputo tipidagi kasr tartibli hosilalasi qatnashgan

$J[y]=\int_a^b F\left(x,y(x),{}^{C}D_{a+}^{\alpha}y(x)\right)dx,\ 0<\alpha<1$ funksional berilgan bo`lsin, bu yerda $F\in C^1$, $y\in AC[a,b]$, ya’ni $y(x)[a,b]$ da absolyut uzluksiz. Agar $y(x)$ funksiya quyidagi $y(a)=y_0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi **ekstremal** bo‘lsa, u holda $y(x)$ quyidagi **umumlashgan kasr tartibli Eyler–Lagranj tenglamasini** qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,v)+D_{b-}^{\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial v}(x,y,v)\right)=0,\ v={}^{C}D_{a+}^{\alpha}y(x),$$

hamda qo`shimcha tabiiy boshlang`ich shart bajariladi:

$$I_{b-}^{1-\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\Big|_{x=a}=0.$$

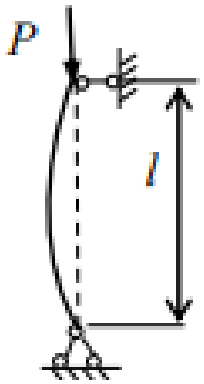
Yuqorida ko`rgan funksionallarimiz bir o`zgaruvchili funksiya va uning hosilalari qatnashgan funksionallar edi. Ammo ko`plab amaliy masalalar xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan to`la va aniq ifodalanadi va bunday tenglamalarga mos funksionallar bir necha argumentli funksiyalar hamda ularning xususiy hosilalariga bog`liq bo`ladi.

Masalan ushbu integro-differensial tenglamani ko`raylik[18]:

$$m\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2}+EJ\left(\frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4}-\int_0^t\frac{Ae^{-\beta(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\frac{\partial^4 W(x,\tau)}{\partial x^4}d\tau\right)-P\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2}=q(x,t)$$

.

Bu tenglama bo`ylama siquvchi $P$ kuch va ko`ndalang $q(x,t)$ kuch ta’sirida l uzunlikdagi qovushqoq elastik sterjenning tebranish tenglamasidir.



Bu yerda, m - birlik uzunlikga mos massa, E - elastiklik moduli, J - inrsiya momenti, $W(x,t)$ - egilish, $R(t)=\frac{Ae^{-\beta t}}{t^{\alpha}}$ - Koltunov-Rijanitsinning relaksatsiya yadrosi[18], A - qovushqoqlik koeffitsenti, $\beta>0, 0<\alpha<1$.

Tenglamadagi $\int_0^t\frac{Ae^{-\beta(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\frac{\partial^4 W(x,\tau)}{\partial x^4}d\tau$ hadni qarasak, bu yerdagi $\frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ ifoda odatda α - kasr tartibli operatorlarning yadrosi

hisoblanadi. $e^{-\beta(t-\tau)}$ ko‘paytuvchisi esa bu operatorning eksponensial tartibga solingan yoki umumlashtirilgan ko‘rinishi ekanligini anglatadi.

Agar Riman-Liuvill ma'nosidagi kasr tartibli hosilani $D_t^{\alpha,\beta}$ kabi belgilasak (yoki umumiy holatda kasr tartibli integral operatorni I^{α} desak), tenglamani ixchamroq ko‘rinishda yozish mumkin, ya’ni tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$m\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2}+EJ\left(\frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4}-A\cdot D_t^{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4}\right]\right)-P\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2}=q(x,t)$$

Bu tenglamani Kaputo ma’nosidagi kasr tartibli hosila orqali quyidagicha yozish mumkin:

$$m\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2}+EJ\left(\frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4}-A\cdot\Gamma(\alpha)\cdot {}^{C}D_{0,t}^{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4}\right]\right)-P\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2}=q(x,t)$$

Keltirilgan integro-differensial tenglama uchun variatsion hisob tamoyillariga ko‘ra funksionalni (ya'ni, energiyani ifodalovchi ifodani) topish uchun biz Gamilton prinsipidan yoki Lagranj funksiyasidan foydalanamiz.

Funksional $J(W)$ quyidagi umumiy ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$J(W)=\int_0^t\int_0^l L dxdt$$

Bu yerda L Lagranj funksiyasi bo‘lib, u kinetik energiya, potensial energiya va tashqi kuchlar ishining ayirmasidan iborat. Lagranj funksiyasi qaralayotgan masala uchun quyidagi qismlardan iborat bo`ladi:

$T=\frac{1}{2}m\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2$ - kinetik energiya; $U=\frac{1}{2}EJ\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2$ - egilish energiyasi;

$A_P=\frac{1}{2}P\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2$ - P kuchning ishi; $\Phi=\frac{1}{2}EJ\cdot A\int_0^t \frac{e^{-\beta(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W(x,\tau)}{\partial x^2}d\tau$ - qovushqoq elastik qism (bu qism dissipativ (energiya yutilishi) xarakterga ega bo‘lgani uchun odatda variatsion hisobda qovushqoq elastik potensial ko‘rinishida qo‘shiladi);

$A_q=\frac{1}{2}q(x,t)W$ - q tashqi yuklamaning potensiali.

Demak, yuqoridagi integro-differensial tenglamaga mos keluvchi funksional quyidagi ko`rinishda yoziladi:

$$J(W)=\int_0^t\int_0^l\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}EJ\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2+\frac{EJ\cdot A}{2}\left(\int_0^t\frac{e^{-\beta(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\frac{\partial^2 W(x,\tau)}{\partial x^2}d\tau\right)\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}P\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}q(x,t)W\right]dxdt\,.$$

Umumlashgan kasr tartibli integral operatorni quyidagicha kiritsak $(I_{0,t}^{\alpha,\beta}\phi)(t)=\int_0^t\frac{e^{-\beta(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\phi(\tau)d\tau$ u holda funksional quyidagicha yoziladi:

$$J(W)=\int_0^t\int_0^l\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}EJ\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2+\frac{EJ\cdot A}{2}\left(I_{0,t}^{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2}\right]\right)\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}P\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}q(x,t)W\right]dxdt\,.$$

Bu funksionaldan W bo`yicha variatsiya olib nolga tenglasak, yuqoridagi kasr tartibli hosila qatnashgan xususiy hosilali differensial tenglama kelib chiqadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Подлубный И. Дробное исчисление и его приложения. — М.: Физматлит, 1999.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Elsevier, 2006.
3. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. — Gordon and Breach, 1993.

4. Туева Т.В. Дробные производные и интегралы в моделировании физических процессов. — Казань, 2015.
5. Akbarov U.Y. About calculating fractional derivatives and integral using Maple. // JournalNX- A Multidisciplinary Peer Reviewed Journal. VOLUME 9, ISSUE 12, December - 2023, pp.318-321.
6. Акбаров У.Й. Обучение дробным производным и дробным интегралам функций для инженерных кадров. //Zamonaviy ta’limni modernizatsiyalash muhandislik yo`nalishidagi malakali kadrlar tayyorlashning muammo va yechimlari. Xalqaro miqyosidagi fan va ta’lim yo`nalishidagi anjuman materiallar to`plami. 6-7 noyabr 2025 yil. Qo`qon, B.127-131.
7. Akbarov U.Y., Turmetov B.X. Kasr tartibli hosila va integralning tatbiqlari haqida. //”Ilm-fan muammolari tadqiqotchilar talqi;nida” mavzusidagi xalqaro ilmiy konferensiya materiallari to`plami. 20 may 2023 yil. Qo`qon-Xo`jand. B. 73-78.
8. Akbarov U.Y. Kasr tartibli hosilali funksionallar va ularning ekstremumlari. //”Ta’limda sun’iy intellect: Tadqiqotlar, amaliyot va istiqbollar” mavzusidagi Xalqaro ilmiy-amaliy anjuman materiallari. 2026-yil, 22-aprel. Qo`qon, B. 1138-1146.
9. Jihad Asad and co-authors. Revealing fractional effects in an asymmetric two-dimensional oscillator through variational mechanics. // Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control. 2026, Vol. 0(0) 1-14. DOI: 10.1177/14613484261434287.
10. I. M. Gelfand, S. V. Fomin Calculus of Variations. — Mineola, New York: Dover Publications, 2000.
11. Bruce van Brunt The Calculus of Variations. — New York: Springer, 2004.
12. L. E. Elsgolc Calculus of Variations. — Oxford: Pergamon Press, 1961.
13. Charles B. Morrey Multiple Integrals in the Calculus of Variations. — Berlin: Springer-Verlag, 1966.
14. Jürgen Jost, Xianqing Li-Jost Calculus of Variations. — Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
15. Agnieszka B. Malinowska, Tatiana Odzijewicz, Delfim F. M. Torres Advanced Methods in the Fractional Calculus of Variations. — Cham: Springer, 2015.
16. Ricardo Almeida, Dina Tavares, Delfim F. M. Torres The Variable-Order Fractional Calculus of Variations // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2015. — Vol. 35, No. 12. — P. 6037–6052.
17. Tatiana Odzijewicz, Agnieszka Malinowska, Delfim F. M. Torres Fractional Calculus of Variations in Terms of a Generalized Fractional Integral with Applications to Physics // Abstract and Applied Analysis. — 2012. — Vol. 2012. — Article ID 871912.
18. Акбаров У.Й,, Эшматов Х., Бадалов Ф.Б. Устойчивость вязкоупругих стержней при динамическом нагружении. // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1992, Volume 33, Issue 4, Pages 613–616. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00864292.

IKKINCHI TUR PARABOLIK-GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALA HAQIDA

Asqaraliyeva Muxtasar Azizjon qizi
Qo‘qon davlat universiteti o‘qituvchisi
https://doi.org/10.5281/zenodo.20594940

Annotatsiya. *Ushbu maqolada ikkinchi tur buzilish chizig‘iga ega bo‘lgan parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun nolokal* C_p *masala yechimining bir qiymatli yechilishi ayrim shartlar asosida isbotlangan va parabolik va giperbolik sohalar tomonidan* $y=0$ *buzilish chizig‘ida berilgan funksiyalar orasidagi funksional bog‘lanishlar olingan hamda* C_p *masala yechimining yagonaligi va mavjudligi isbotlangan.*

Kalit so‘zlar. *parabolik-giperbolik, funksional, nolokal, buzilish chizig‘i.*

Аннотация*. В данной статье доказано однозначное решение нелокальной* C_p *задачи для параболико-гиперболического уравнения с разломом второго порядка при определенных условиях,* $y=0$ *получены функциональные связи между функциями, заданными параболической и гиперболической областями на разломе, и доказаны единственность и существование* C_p *решения задачи.*

Ключевые слова: *параболически-гиперболический, функциональный, нелокальный, линия разлома.*

Abstract. *In this article, the single-valued solution of a nonlocal* C_p *problem for a parabolic-hyperbolic equation with a second-order fault line is proved under certain conditions, and* $y=0$ *functional connections between the functions given by the parabolic and hyperbolic domains on the fault line are obtained, and the uniqueness and existence of the solution* C_p *of the problem are proven.*

Ключевые слова: *параболически-гиперболический, функциональный, нелокальный, линия разлома.*

KIRISH. Buzilish chizig‘iga ega bo‘lgan aralash tipdagi tenglamalar uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalar yechish hozirgi paytda xususiy hosilali differensial tenglamalardagi asosiy rivojlangan yo‘nalishlardan biridir. Buning sabablaridan bir tomoni bu tenglamalarni amaliyotga qo‘llanilishi bo‘lsa, ikkinchi tomondan esa nazariy jihatdan bu tenglamalarga qo‘yilgan masalalarni yechilishidir.

Quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$0=\begin{cases} x u_{xx}+\alpha_0 u_x-u_y, & x>0, \quad y>0, \\ u_{xx}-(-y)^m u_{yy}, & x>0, \quad y<0, \end{cases} \qquad (1)$$

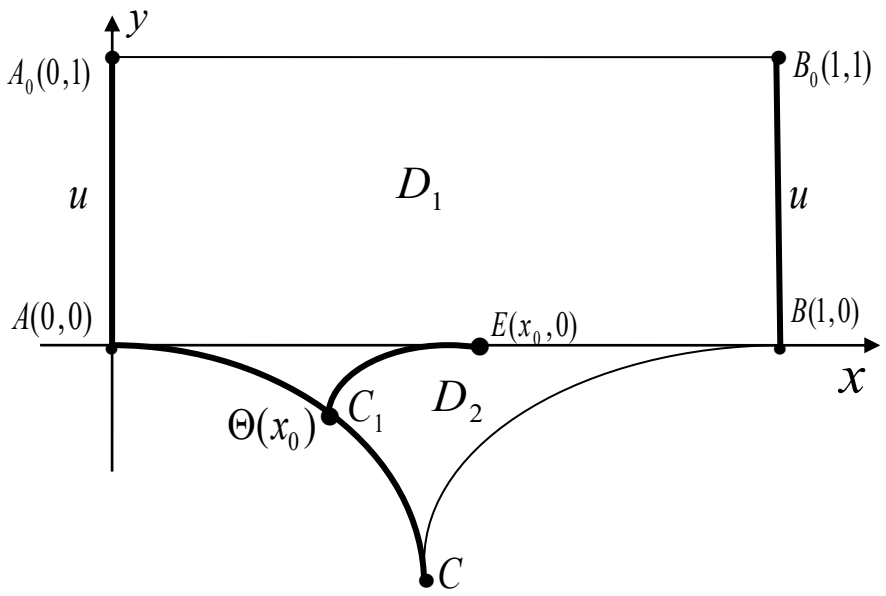
bu yerda

$$0<\alpha_0<1+2\beta<1, \quad 2\beta=\frac{m}{m-2}, \quad 0<m<1. \qquad (2)$$

Quyida (1) ko‘rinishdagi ikkinchi tur buzilish chizig‘iga ega bo‘lgan parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun C_p masala yechimining bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

(1) tenglama uchun C_p masalasini qo‘yilishi

D orqali $x>0,\ y>0$ bo‘lganda $x=0,\ x=1,\ y=1$ mos ravishda to‘g‘ri chiziqlarda yotgan $AA_0,\ BB_0,\ A_0B_0$ kesmalar va $x>0,\ y<0$ bo‘lganda esa (1) tenglamaning $AB:\ y=0,\ 0<x<1,$ $AC:\ x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0,$ $BC:x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1$ xarakteristikalari bilan chegaralangan sohani belgilaymiz(**1-chizma**).



1-chizma.

Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$J=\{(x,y):\ 0<x<1,\ y=0\},$$

$$D_1=D\cap\{x>0,\ y>0\},\qquad D_2=D\cap\{x>0,\ y<0\},$$

$$D=D_1\bigcup D_2\bigcup J,$$

$$\lim_{y\to\pm0}u(x,y)=\tau^{\pm}(x),\ (x,0)\in\bar{J},\ \lim_{y\to\pm0}u_y(x,y)=\nu^{\pm}(x),\ (x,0)\in J \qquad (3)$$

$$2\beta=\frac{m}{m-2},\quad -\frac{1}{2}<\beta<0, \qquad (4)$$

$$\Theta(x)=\left(\frac{x}{2};\ -\left(\frac{2-m}{4}(1+x)\right)^{\frac{2}{2-m}}\right), \qquad (5)$$

bu yerda $\Theta(x)-$ (1) tenglamaнинг $E(x,0)\in J$ nuqtasidan chiquvchi EC_1 xarakteristikasi bilan AC xarakteristikasi kesishish nuqtalarining koordinatalari.

C_p masala Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ funksiya topilsin:

1) $u(x,y)\in C(\bar{D}_1\cup\bar{D}_2)$;

2) $u(x,y)\in C^{2,1}_{x,y}(D_1)$ bo‘lib, D_1 sohada (2.1) tenglamani qanoatlantirsin;

3) $u(x,y)\in R_2$ bo‘lib, D_2 sohada (1) tenglamani umumlashgan yechimi bo‘lsin;

4) $u(x,y)$ - funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$u|_{AA_0}=\varphi_1(y),\quad u|_{BB_0}=\varphi_2(y),\quad 0\le y\le 1, \qquad (6)$$

$$D^{-\beta}_{0x}\frac{d}{dx}u\left[\Theta(x)\right]=a(x)u(x,0)+b(x),\quad (x,0)\in J, \qquad (7)$$

5) $u_y\in C\left(D_1\bigcup J\right)\cap C\left(D_2\bigcup J\right)$ bo‘lib, J buzilish chizig‘ida quyidagi

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to-0}u(x,y)=p_1(x)\lim_{y\to+0}u(x,y)+q_1(x),\quad (x,0)\in\bar{J},\\ &\lim_{y\to-0}u_y(x,y)=p_2(x)\lim_{y\to+0}u_y(x,y)+q_2(x),\quad (x,0)\in J,\end{aligned} \qquad (8)$$

ulash sharti bajarilsin, bu yerda $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $a(x)$, $b(x)$, $p_j(x)$, $q_j(x)\,(j=1,2)$ berilgan funksiyalar bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

$$\varphi_j(x)\in C\left[0,1\right]\bigcap C^1(0,1),\quad (j=1,2), \qquad (9)$$

$$a(x)\in C^1(\bar{J}),\quad b(x)\in C^1\left(0,1\right], \qquad (10)$$

$$p_2(x)<0,\quad \forall\, x\in\bar{J},\quad a(x)p_1(x)\ge 0,\quad \forall\,(x,0)\in\bar{J}, \qquad (11)$$

$$p_j(x),\ q_j(x)\in C\left(\bar{J}\right)\cap C^2\left(J\right),\ (j=1,2), \qquad (12)$$

$b(x)$ funksiya $x\to 0$ da $-\beta$ darajadan kichik cheksizlikka intiladi, $x\to 1$ da esa chegaralangan. $D^{\alpha}_{0x}[\cdot]$ - α kasr tartibli integro-differeisial operator bo‘lib, $\Theta(x)$ – (5) formula orqali aniqlanadi (1-chizma).

Parabolik soha tomonidan $y=0$ buzilish chizig‘ida olingan $\tau^+(x)$ va $\nu^+(x)$ funksiyalar orasidagi funksional bog‘lanish

D_1 sohada quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$xU_{xx}+\alpha_0U_x-U_y=0,\quad 0<\alpha_0<1. \qquad (13)$$

(2), (3) va (6) shartlarga hamda parabolik tipdagi tenglamaning xossalariga ko‘ra (13) tenglamaga $y\to+0$ limitga o‘tamiz va quyidagi masalani hosil qilamiz:

$$x\,\tau^{+\prime\prime}(x)+\alpha_0\tau^{+\prime}(x)=\nu^+(x),\quad (x,0)\in J, \qquad (14)$$

$$\tau^+(0)=\varphi_1(0)=0,\quad \tau^+(1)=\varphi_2(0). \qquad (15)$$

Endi (14) va (15) masalani yechishga kirishamiz. Buning uchun (14) differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

Ushbu

$$x\,\tau^{+\prime\prime}(x)+\alpha_0\tau^{+\prime}(x)=0 \qquad (16)$$

bir jinsli differensial tenglamani umumiy yechimini izlaymiz:

(16) tenglamaga $z(x)=\tau^{+\prime}(x)$ belgilash kiritib, uni quyidagi

$$xz'+\alpha_0 z=0 \qquad (17)$$

ko‘rinishda yozib olamiz va yechamiz:

$$x\frac{dz}{dx}=-\alpha_0 z$$

$$\frac{dz}{z}=-\alpha_0\frac{dx}{x}$$

ikkala tomonini integrallab

$$\ln|z|=-\alpha_0\ln|x|+\ln|C_1|=\ln\left|C_1x^{-\alpha_0}\right|$$

ni hosil qilamiz. Bundan

$$z=C_1x^{-\alpha_0}$$

ni olamiz. Belgilashga ko‘ra esa

$$\tau^{+\prime}(x)=C_1x^{-\alpha_0}$$

yoki

$$\tau^{+}(x)=\frac{C_1x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0}+C_2 \qquad (18)$$

ni hosil qilamiz. (18) formula (16) tenglamaning umumiy yechimidir.

Endi o‘zgarmasni variatsiyalash usulidan foydalanib, (14) tenglamaning umumiy yechimini topamiz. Buning uchun (18) ifodani ushbu

$$\tau^{+}(x)=\frac{C_1(x)x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0}+C_2(x) \qquad (19)$$

ko‘rinishda yozib olamiz.

(19) ni (14) ga qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{cases}\dfrac{C_1'(x)x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0}+C_2'(x)=0,\\ C_1'(x)x^{1-\alpha_0}=\nu^{+}(x),\end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases}C_1'(x)=x^{\alpha_0-1}\nu^{+}(x),\\ C_2'(x)=-\dfrac{\nu^{+}(x)}{1-\alpha_0}.\end{cases}$$

Bundan esa, noma'lum $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funksiyalarni quyidagicha topamiz:

$$\begin{cases}C_1(x)=\int\limits_0^x t^{\alpha_0-1}\nu^{+}(t)dt+C_3,\\ C_2(x)=-\dfrac{1}{1-\alpha_0}\int\limits_0^x\nu^{+}(t)dt+C_4\end{cases} \qquad (20)$$

(20) ni (19) ga qo‘yib, 14) tenglamaning umumiy yechimini olamiz:

$$\tau^+(x)=\frac{x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0}\int_0^x t^{\alpha_0-1}\nu^+(t)dt+\frac{C_3x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0}+C_4-\frac{1}{1-\alpha_0}\int_0^x \nu^+(t)dt \quad (21)$$

Endi noma'lum C_3 va C_4 o‘zgarmaslarni topish uchun (21) umumiy yechimga (15) shartni qanoatlantiramiz:

$$\tau^+(0)=C_4=0,$$

$$\tau^+(1)=\frac{1}{1-\alpha_0}\int_0^1 t^{\alpha_0-1}\nu^+(t)dt+\frac{C_3}{1-\alpha_0}-\frac{1}{1-\alpha_0}\int_0^1 \nu^+(t)dt=\varphi_2(0).$$

Bundan, noma'lum C_3 va C_4 o‘zgarmaslarni ushbu

$$\begin{cases} C_4=0, \\ C_3=\int_0^1 \nu^+(t)dt-\int_0^1 t^{\alpha_0-1}\nu^+(t)dt+(1-\alpha_0)\varphi_2(0) \end{cases} \quad (22)$$

ko‘rinishda aniqlaymiz.

(22) ni (21) ga qo‘yamiz:

$$\tau^+(x)=\frac{x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0}\int_0^x t^{\alpha_0-1}\nu^+(t)\,dt+\frac{x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0}\int_0^1\left(1-t^{\alpha_0-1}\right)\nu^+(t)\,dt-$$

$$-\frac{1}{1-\alpha_0}\int_0^x \nu^+(t)\,dt+x^{1-\alpha_0}\varphi_2(0)=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha_0}\int_0^x\left(x^{1-\alpha_0}t^{\alpha_0-1}+x^{1-\alpha_0}-t^{\alpha_0-1}x^{1-\alpha_0}-1\right)\nu^+(t)\,dt+$$

$$+\frac{x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0}\int_x^1\left(1-t^{\alpha_0-1}\right)\nu^+(t)\,dt+x^{1-\alpha_0}\varphi_2(0)=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha_0}\int_0^x(x^{1-\alpha_0}-1)\,\nu^+(t)\,dt+\frac{x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0}\int_x^1\left(1-t^{\alpha_0-1}\right)\nu^+(t)\,dt+x^{1-\alpha_0}\varphi_2(0).$$

Shunday qilib, (14) (15) masalaning yechimi quyidagi ko‘rinishda topamiz:

$$\tau^+(x)=\int_0^1 G(x,t)\nu^+(t)dt+x^{1-\alpha_0}\varphi_2(0),\quad (x,0)\in\bar{J}, \quad (23)$$

bu yerda

$$G(x,t)=\frac{1}{1-\alpha_0}\begin{cases} x^{1-\alpha_0}(1-t^{\alpha_0-1}), & 0\le x\le t, \\ x^{1-\alpha_0}-1, & t\le x\le 1. \end{cases} \quad (24)$$

(24) formula bilan aniqlangan $G(x,t)$ funksiya bir jinsli (14) , (15) masalasining Grin funksiyasi bo‘ladi.[1]

Demak, (23) formula D_1 parabolik sohadan J buzilish chizig‘ida olingan $\tau^+(x)$ va $\nu^+(x)$ funksiyalar orasidagi birinchi funksional bog‘lanish.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Gellerstedt S. Quelques problems mixtes pour equation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$. // Arxiv F.M. A.o.F. 26A 1938 v.3.p.1-32.
2. Islomov B.,Ochilova N.K. О краевой задачи для уравнения параболо-гиперболического типа с двумя линиями и различными порядками вырождения. // «Узбекский математический журнал». 2005. №3. С.43-51.
3. Islomov B.I., Abdullayev A.A. On a problem for an elliptic type equation of the second kind with a conormal and integral condition. \\ Journal Nanosystems: physics, chemistry, mathematics. 2018. 9 (3). Pp. 307-318.
4. Salohiddinov M. Integral tenglamlar. T.: “O‘qituvchi”.2007.256 b.
5. Urinov A.K., Okboev A.B. Nonlocal Boundary-Value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation of the Second Kind. // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. 41(9). Pp. 1886–1897 .
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М. Наука. 1966. Т. 2. 295 с.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука. 1965. Т. 1. 296 с.

[1] Исломов Б.И., Мадрахимова З.С. Краевая задача со смещением для уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором."Узбекский математический журнал". 2009. №4. С.76-81.

$a\sin x + b\cos x = c$ KO‘RINISHDAGI TENGLAMALARNI YECHISH

Axmedova Gavxar Axadovna
QDU
https://doi.org/10.5281/zenodo.20594990

Annotatsiya: *Ushbu maqolada* $a\sin x + b\cos x = c$ *ko‘rinishidagi trigonometrik tenglamalarni yechish usullari haqida ma’lumotlar beriladi. Mazkur turdagi tenglamalarni soddalashtirish, ularni bir jinsli trigonometrik tenglamalarga keltirish hamda yordamchi burchak usulidan foydalanib yechish yo‘llari tahlil qilinadi. Shuningdek, trigonometrik funksiyalar orasidagi bog‘lanishlar va almashtirish formulalaridan samarali foydalanish ko‘nikmalari shakllantiriladi.*

Kalit so‘zlar: *trigonometrik tenglamalar, umumiy yechim, yordamchi burchak usuli, asosiy trigonometrik ayniyatlar, bir jinsli tenglamalar.*

Abstract: *This article provides information about methods for solving trigonometric equations of the form* $a\sin x + b\cos x = c$. *The ways of simplifying such equations, reducing them to homogeneous trigonometric equations, and solving them using the auxiliary angle method are analyzed. In addition, skills of effectively using relationships between trigonometric functions and transformation formulas are developed.*

Keywords: *trigonometric equations, general solution, auxiliary angle method, basic trigonometric identities, homogeneous equations.*

Аннотация: *В данной статье рассматриваются методы решения тригонометрических уравнений вида* $a\sin x + b\cos x = c$. *Анализируются способы упрощения таких уравнений, приведения их к однородным тригонометрическим уравнениям, а также решения с использованием метода вспомогательного угла. Кроме того, формируются навыки эффективного использования связей между тригонометрическими функциями и формул преобразования.*

Ключевые слова: *тригонометрические уравнения, общее решение, метод вспомогательного угла, основные тригонометрические тождества, однородные уравнения.*

Trigonometrik tenglama va tengsizliklarni yechish jarayonida haqiqiy argumentli trigonometrik funksiyalar va ularning xossalarini, bir xil argumentli trigonometrik funksiyalar orasidagi munosabatlarni, qo‘shish teoremalari va ularning natijalarini, trigonometrik funksiyaning ko‘paytmasini yig`indiga va aksincha almashtirish formulalariga oid bilimlarni tahlil qila olishi kerak..

Ushbu

$$a\sin x + b\cos x = c \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi tenglamani bir jinsli trigonometrik tenglamaga keltirib yechish mumkin. Haqiqatdan ham

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = c\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)$$

hamma hadlarni o‘ng tomonga o‘tkazib

$$(b+c)\sin^2\frac{x}{2}-2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+(c-b)\cos^2\frac{x}{2}=0$$

tenglamani hosil qilamiz. Agar $b+c\neq 0$ bo‘lsa tenglamaning har ikki qismini $\cos^2\frac{x}{2}\neq 0$ ga bo‘lib unga teng kuchli

$$(c+b)tg^2\frac{x}{2}-2atg\frac{x}{2}+(c-b)=0$$

tenglamani hosil qilamiz. Bundan $tg\frac{x}{2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c+b}$.

Agar $a^2+b^2>c^2$ bo‘lsa, $x=2arctg\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c+b}+2\pi k;\ k\in Z.$

Agar $a^2+b^2=c^2$ bo‘lsa, $x=2arctg\frac{a}{c+b}+2\pi n;\ n\in Z.$

Agar $a^2+b^2<c^2$ bo‘lsa tenglama ildizga ega emas.

Agar $b+c=0$ va $a\neq 0$ bo‘lsa $\cos\frac{x}{2}\left((c-b)\cos\frac{x}{2}-2a\sin\frac{x}{2}\right)=0,$ bundan $x=\pi+2\pi k;\ k\in Z$ va $x=2arctg\frac{c-b}{2a}+2\pi l;\ l\in Z.$ Agar $b+c=0$ va $a=0, b=c$ bo‘lsa $\cos^2\frac{x}{2}=0, x=\pi+2\pi m;\ m\in Z.$ Bunday tenglamalarni

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \quad \text{va} \quad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

formulalarni qo‘llab ham yechsa bo‘ladi. Bunda $x=\pi+2\pi k;\ k\in Z$ berilgan tenglama ildizi bo‘lmasligini tekshirib ko‘rish kerak.

1-misol. Ushbu tenglamani yeching: $2\sin x+3\cos x+3=0$

Yechish. $x=\pi+2\pi n;\ n\in Z$ tenglamaning ildizi bo‘ladi. $x\neq\pi+2\pi n;\ n\in Z$ deb hisoblaymiz va $\sin x, \cos x$ larni $tg\frac{x}{2}$ orqali ifodalab quyidagi tenglamani hosil qilamiz.

$$\frac{4tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{3-3tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+3=0,$$

$$4tg\frac{x}{2}+3-3tg^2\frac{x}{2}+3+3tg^2\frac{x}{2}=0, \qquad 4tg\frac{x}{2}=-6 \quad \text{va}$$

$x=-2arctg1{,}5+2\pi n,\ n\in Z.$

Javob: $\pi+2\pi k;\ k\in Z,\ -2arctg1{,}5+2\pi n;\ n\in Z.$

$$a\sin\omega x+b\cos\omega x=c\ \ \left(a^2+b^2\neq 0,\ \omega\neq 0\right) \qquad (2)$$

ko‘rinishdagi tenglamalar (9) tenglamaning xususiy holidir. Bunday tenglamalarni universal almashtirish yoki bir jinsli tenglamaga keltirib yechish mumkin. Bunday tenglamalarni yechishning yana bir usuli yordamida burchak kiritish usulini ko‘rsatib o‘tamiz. $a\sin\omega x+b\cos\omega x=c\ \left(a^2+b^2\neq 0\right)$ bo‘lsin. Uning har ikki qismini $\sqrt{a^2+b^2}$ ga bo‘lamiz. U holda

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

φ – quyidagi sistemaning biror yechimi bo‘lsin.

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$$

Bu tengliklardan foydalanib tenglamalarni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz.

$$\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ formulani qo‘llab $\sin(\omega x+\varphi)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ tenglamani hosil qilamiz.

Agar $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1,\ a^2+b^2\ge c^2$ bo‘lsa tenglama

$$\omega x+\varphi=(-1)^n\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi n;n\in Z$$

yoki

$$x=\frac{(-1)^n}{\omega}\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{\pi n}{\omega};\ n\in Z$$

yechimga ega.

Agar $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|>1,\ a^2+b^2>c^2$ bo‘lsa tenglama yechimga ega bo‘lmaydi.

2-misol. Ushbu tenglamani yeching: $2\sin 2x+3\cos 2x=1{,}5$.

Yechish. Yuqorida keltirilgan shakl almashtirishlarni bajaramiz:

$$\sqrt{4+9}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\sin 2x+\frac{3}{\sqrt{13}}\cos 2x\right)=\frac{3}{2}.$$

$\dfrac{2}{\sqrt{13}}=\cos\varphi,\ \ \dfrac{3}{\sqrt{13}}=\sin\varphi$ deb belgilash kiritib, $\sin(2x+\varphi)=\dfrac{3}{2\sqrt{13}}$ tenglamani hosil qilamiz. Bundan

$$2x+\varphi=(-1)^k \arcsin\frac{3}{2\sqrt{13}}+\pi k;\ k\in Z,$$

$$x=-\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{2}(-1)^k \arcsin\frac{3}{2\sqrt{13}}+\frac{\pi k}{2};\ k\in Z.$$

φ burchak o‘rniga $\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$ yoki $\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$ ni olamiz. ($\sin\varphi>0,\ \cos\varphi>0$ va φ – birinchi chorak burchagi).

Javob: $-\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}+\frac{1}{2}(-1)^k \arcsin\frac{3}{2\sqrt{13}}+\frac{\pi k}{2};\ k\in Z$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Muhamedov K.”Elementar matematikadan qo‘llanma” O‘quv qo‘llanma. Sharq nashriyoti matbaa ak.komp.Toshkent 2008 y.

2. Севрюков, П. Ф. ”Тригонометрические уравнения и неравенства и методика их решения” Учебное пособие. Ставрополь. Сервис-школа, 2004.

3. G.Axmedova “Trigonometrik tenglama va tengsizliklar” O‘quv qo‘llanma. “ART PRESS” nashryoti, Qo‘qon 2023 yil.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА В ОБЛАСТИ, ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ КОТОРОЙ- ПЕРВАЯ ЧЕТВЕРТЬ ПЛОСКОСТИ

Бектошева Ш. А.[1], Нишонов Н.[2]
[1]PhD докторант КГУ, [2]магистрант ФерГУ.
https://doi.org/10.5281/zenodo.20595044

Аннотация. *В теории уравнений смешанного типа очень много работ в ограниченных областях с гладкой границей ограниченной нормальной кривой для уравнений смешанного типа первого и второго рода. В данной работе для уравнения смешанного типа второго рода в неограниченной области эллиптическая часть которой является первой четвертью плоскости, исследуется задача Трикоми. Единственность решения задачи доказывается с помощью принципа экстремума.*

Ключевые слова: *задача Трикоми, уравнение смешанного типа второго рода, принцип экстремума, первая четверть плоскости.*

ВВЕДЕНИЕ.

Новым этапом в развитии теории краевых задач для уравнений смешанного типа являются работы М.А. Лаврентьева [1], Л. Берс [2], Ф.И. Франкля [3] и др. где указаны на важность проблемы, в частности, задачи Трикоми, в связи трансзвуковой газовой динамикой, с магнитогидродинамическими течениями с переходом через скорость звука и скорость Альфена, с теорией бесконечно малых изгибаний поверхностей и с многими другими вопросами механики. Следует отметить, что подавляющая часть работ по уравнениям смешанного типа относится к исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа первого рода то есть рассматривались лишь уравнения у которых касательная к параболической линии ни в одной точке не совпадает с характеристическим направлением уравнения в этой точке [4-9]. Известно, что задачи Трикоми возникают в различных приложениях, включая аэродинамику (например, при исследовании течений газа со сверхзвуковыми скоростями) и другие области, где необходимо учитывать изменение типа уравнения в разных областях [10-11]. Для уравнения смешанного типа второго рода в неограниченных областях , когда эллиптическая часть смешанной области является вертикальной или горизонтальной полуполосой исследована в работах [12-13].

Задача Трикоми для уравнения смешанного типа первого рода в неограниченной области, когда эллиптическая часть области является первой четвертью плоскости исследована в работе [9]. В данной работе эта задача исследуется для уравнения смешанного типа второго рода.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + \operatorname{sign} y \,|y|^m u_{yy} = 0, \quad 0 < m < 1 \qquad (1)$$

в неограниченной смешанной области $\Omega=\Omega_1\cup l_0\cup\Omega_2$, где $\Omega_1=\{(x,y):0<x<+\infty,0<y<+\infty\}$, $l_0=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\}$ а Ω_2 - область полуплоскости $y<0$, ограниченная отрезком AB оси Ox и двумя характеристиками

$$AC: x-\left[2/(2-m)\right](-y)^{(2-m)/2}=0,\ BC: x+\left[2/(2-m)\right](-y)^{(2-m)/2}=1$$

уравнения (1), выходящими из точки $C\left(\frac{1}{2};-\left(\frac{2-m}{4}\right)^{\frac{2}{2-m}}\right)$. Далее, положим

$$\beta=\frac{m}{2(m-2)},\ -\frac{1}{2}<\beta<0,$$

$$l_1=\{(x,y):1<x<+\infty,\ y=0\},l_2=\{(x,y):0<y<+\infty,\ x=0\}$$

$$D_{0x}^{\alpha}f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int_0^x(x-t)^{-(k+1)}f(t)dt,\alpha<0\\ \dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}D_{0x}^{\alpha-(n+1)}f(x),\alpha>0\end{cases}$$

где α -любое действительное число, а n -целая часть $\alpha\geq n$.

В полуплоскости $y<0$ уравнение (1) принимает вид

$$u_{xx}-(-y)^m u_{yy}=0, \qquad (2)$$

В характеристических координатах

$$\xi=x-\left[2/(2-m)\right](-y)^{(2-m)/2},\ \eta=x+\left[2/(2-m)\right](-y)^{(2-m)/2} \qquad (3)$$

уравнение (1) переходит в уравнение Эйлера-Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0$$

Известно, что обобщенное решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$\lim_{y\to0}u(x,y)=\tau(x),\ \ 0\leq x\leq1; \qquad (4)$$

$$\lim_{y\to0}u_y(x,y)=\left[2(1-2\beta)\right]^{-2\beta}\lim_{\eta\to\xi}(\eta-\xi)^{2\beta}\left(u_\xi-u_\eta\right)=\nu(x),\ \ 0<x<1, \qquad (5)$$

имеет вид [13]:

$$u(\xi,\eta)=k_1\int_0^1\tau(t)\lambda^{\beta}(1-\lambda)^{\beta}d\lambda+\frac{k_1(\eta-\xi)}{2(1+2\beta)}\int_0^1\tau'(t)\lambda^{\beta}(1-\lambda)^{\beta}(2\lambda-1)d\lambda-$$

$$-k_2(\eta-\xi)^{1-2\beta}\int_0^1\nu(t)\lambda^{-\beta}(1-\lambda)^{-\beta}d\lambda$$

где $t=\xi+(\eta-\xi)\lambda$, $k_1=\dfrac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)}$, $k_2=\dfrac{\left[2(1-2\beta)\right]^{2\beta}\Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma^2(1-\beta)}$.

Переходя обратно к переменным x,y по формулам (3) имеем

$$u(x,y)=k_1\int_0^1\tau(t)\lambda^{\beta}(1-\lambda)^{\beta}\,d\lambda+\frac{k_1}{1-m}(-y)^{1-m/2}\int_0^1\tau'(t)\lambda^{\beta}(1-\lambda)^{\beta}(2\lambda-1)d\lambda+$$

$$+\left[2(1-2\beta)\right]^{1-2\beta}k_2y\int_0^1\nu(t)\lambda^{-\beta}(1-\lambda)^{-\beta}\,d\lambda \qquad (6)$$

где $t=x+(1-2\beta)(-y)^{1-\frac{m}{2}}(2\lambda-1)$.

При любых $\tau(x)\in C^3[0,1]$ и $\nu(x)\in C^2[0,1]$ решение (6) является дважды непрерывно дифференцируемым решением задачи Коши для уравнения (2) с начальными данными (4) и (5).

В области Ω_2 рассмотрим следующий класс R обобщенных решений задачи Коши введенный в работе [14]. Если $\tau(x)$ есть интеграл дробного порядка от некоторой функции $T(x)$ непрерывной в интервале $(0,1)$ и интегрируемой на сегменте $[0,1]$, то есть

$$\tau(x)=\int_0^x T(t)(x-t)^{-2\beta}\,dt \qquad (7)$$

Без ограничения общности будем считать $\tau(0)=0$, из (7) легко следует что $\tau(x)\in C[0,1]$ и существует $\tau'(x)\in C(0,1)$. Функция $\nu(x)$ непрерывна в интервале $(0,1)$ и интегрируема на сегменте $[0,1]$. Тогда решение задачи Коши принадлежащее классу R имеет вид:

$$u(\xi,\eta)=\int_0^{\xi}T(\lambda)(\eta-\lambda)^{-\beta}(\xi-\lambda)^{-\beta}\,d\lambda+\int_{\xi}^{\eta}N(\lambda)(\eta-\lambda)^{-\beta}(\xi-\lambda)^{-\beta}\,d\lambda \qquad (8)$$

где $N(\lambda)=\dfrac{1}{2\cos\pi\beta}T(\lambda)-k_2\nu(\lambda)$, причем функции $T(x)$ и $\nu(x)$ непрерывны в интервале $(0,1)$ и интегрируемы на сегменте $[0,1]$, $\tau(0)$ обращается в нуль порядка не меньше -2β.

Из (8) основное функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ полученное из области гиперболичности Ω_2 уравнения (1), было получено И.Л. Каролем [14]:

$$\tau(x)=k_3\int_0^x\nu(t)(x-t)^{-2\beta}\,dt+F(x),0\le x\le 1; \qquad (9)$$

где $F(x)=\dfrac{2\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+2\beta)}D_{0x}^{2\beta-1}\left[x^{\beta}D_{0x}^{1-\beta}\psi(x)\right]$,

$$k_3=\frac{\left[2(1-2\beta)\right]^{2\beta}\sin\pi\beta\Gamma^2(\beta)}{2\pi\Gamma(2\beta)}.$$

Задача T^{∞}**.** Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$, где $\overline{\Omega}=\overline{\Omega_2}\cup\Omega_1\cup\overline{l_1}\cup\overline{l_2}$;

2) $u(x,y)\in C^2(\Omega_1)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области Ω_1;

3) является обобщенным решением класса R в области Ω_2;

4) удовлетворяет краевым условиям

$u(0,y)=\varphi_1(y)$, $0\le y<+\infty$, $u(x,0)=\varphi_2(x)$ $1\le x<+\infty$ (10)

$\lim\limits_{r\to\infty}u(x,y)=0$, $r^2=x^2+\dfrac{4}{(2-m)^2}y^{2-m}$ (11)

$u(x,y)\Big|_{AC}=\psi(x),0\le x\le 1/2$, (12)

где $\psi(x)$- заданная функция, и на отрезке $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ имеет ограниченную и интегрируемую вторую производную; $\varphi_1(y)\in C[0,+\infty)$ и $\lim\limits_{y\to\infty}\varphi_1(y)=0$; $\varphi_2(x)\in C[1,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi_2(x)=0$; выполняются условия согласования $\varphi_1(0)=\psi(0)$.

На линии $y=0$ параболического вырождения уравнения (1) выполняются условия склеивания:

$u(x,-0)=u(x,+0)$, $u_y(x,+0)=-u_y(x,-0)$.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

ТЕОРЕМА. Задача T^{∞} имеет не более одного решения.

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ решение однородной задачи T^{∞} для уравнения (1) из класса R_2 в области Ω, причем

$u(0,y)=0$, $0\le 0<+\infty$, $u(x,0)=0$ $1\le x<+\infty$ (13)

$\lim\limits_{r\to\infty}u(x,y)=0$, $r^2=x^2+\dfrac{4}{(2-m)^2}y^{2-m}$ (14)

$u\big|_{AC}=0,0\le x\le\dfrac{1}{2}$. (15)

При этом имеем $\psi(x)\equiv 0$. Поэтому соотношение (12) принимает вид

$$\tau(x)=k_3\int_0^x \nu(t)(x-t)^{-2\beta}\,dt, \qquad (16)$$

Из (16) применяя формулу обращения интегрального уравнения Абеля получаем

$$\nu(x)=\frac{\sin 2\beta}{\pi k_3}\left[(1-2\beta)\int_0^x \frac{\tau(x)-\tau(t)}{(x-t)^{2-2\beta}}dt+\frac{\tau(x)}{x^{1-2\beta}}\right] \qquad (17)$$

Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Предположим противное, то есть $u(x,y)\not\equiv 0$. Тогда найдется такое число $r>0$, что существует такая область Ω_r ограниченная нормальным контуром $S_r: x^2+\frac{4}{(2-m)^2}y^{2-m}=r^2, y>0$, отрезками $l_{1r}=\{(x,y):1\le x\le r,\ y=0\}$ $l_{2r}=\{(x,y):x=0, 0\le y\le \frac{(2-m)^2}{4}r^{\frac{2}{2-m}}\}$, и характеристиками AC и BC уравнения (1) где верно что $\max|u(x,y)|>0$. В силу условия (15) из принципа экстремума для гиперболических уравнений[9] следует что функция $u(x,y)$ положительный максимум и отрицательный минимум в области $\overline{\Omega_{2r}}=\overline{\Omega_r}\cap(y<0)$ достигает на отрезке $\overline{l_0}=\{(x,y):0\le x\le 1,\ y=0\}$. С другой стороны в силу принципа экстремума для эллиптических уравнений [15] функция $u(x,y)$ положительный максимум и отрицательный минимум не достигает в области $\Omega_{1r}=\Omega_r\cap(y>0)$. Предположим, что положительный максимум (отрицательный минимум) достигает в точке $P(x_0,0)$ интервала $l_0=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\}$. Тогда из формулы (17) при $x=x_0$ в силу того, что $\tau(x_0)>0$, $\tau(x_0)-\tau(t)>0$ следует что $\nu(x_0)>0$ ($\nu(x_0)<0$). Это противоречит принципу Зарембо-Жиро [15] откуда следует что $\nu(x_0)<0$ ($\nu(x_0)>0$). Поэтому, на интервале $l_0=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\}$ экстремальных значений нет. В силу условий (13) экстремальные значения не достигаются и на l_1 и l_2, кроме этого $u(0,0)=0$. Следовательно, функция $u(x,y)\in C(\overline{\Omega_r})$ в области $\overline{\Omega_r}$ положительный максимум и отрицательный минимум достигает на $\overline{S_r}$, то есть верно следующее неравенство $0\le|u(x,y)|\le\max\limits_{\overline{S_r}}|u(x,y)|$. Делая аналогичные рассуждения точно также для любого $d>r$, получим в области $\overline{\Omega_d}$ неравенство $0\le|u(x,y)|\le\max\limits_{\overline{S_d}}|u(x,y)|$. Учитывая, что $\overline{\Omega_r}\subset\overline{\Omega_d}$ и $u(x,y)\not\equiv const$

имеем $0 < \max\limits_{\overline{S}_r} |u(x,y)| \le \max\limits_{\overline{S}_d} |u(x,y)|$. Последнее неравенство противоречит условию (14). Следовательно, наше предположение неверно, то есть $u(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \overline{\Omega}$.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А., Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа // Доклады АН СССР. 1950. Т. 70. №3. – С. 485-488.
2. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. — М.: Иностранная литература, 1961. — 208 с
3. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. Москва. Наука. 1973. –712 с.
4. Денисова З.Г. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения в неограниченной области // Дифференциальные уравнения. –Минск, 1978. Т. 14. №1. – С. 170-173.
5. Репин О.А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой - полуполоса // Дифференциальные уравнения. –Минск, 1996. Т. 32. №4. – С. 37-43.
6. Севостьянов Г.Д. Две краевые задача Трикоми в безграничной области // Известия высших учебных заведений. 1967. 1(56) – С. 95-101.
7. Зуннунов Р.Т. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в неограниченной области // Узбекский Математический журнал.-Ташкент, 2001. №2. –С. 39-43.
8. Zunnunov R.T. A Problem with Shiff for Mixed-Type Equation in Domain, the Elliptical Part of Which Is a Horizontal Strip. // Lobachevskii journal of mathematics, Vol. 44 No. 10, 2023. –P.4410-4417.
9. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Высшая школа, 1985. – 304 с.
10. Севостьянов Г.Д. Обтекание профиля звуковой струей газа // ИАН СССР. Серия мех. и жид. газа. 1966. Т 30. №2. – С. 53-59.
11. Фалькович С.В. Об одном случае решения задачи Трикоми // В сборнике «Трансзвуковые течения газа». – Саратов, 1964. – С. 3-8.
12. Р. Т. Зуннунов, А. А. Эргашев, “Задача со смещением для уравнения смешанного типа второго рода в неограниченной области”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2016, № 1(12), 26–31.
13. Zunnunov R.T., Parovik R.I., Ergashev A.A. A Bitsadze–Samarskii-Type Problem for a Second-Kind Mixed-Type Equation in a Domain with a Horizontal Half-Strip as Its Elliptic Part./ Mathematics 2026, 14(3), 487; DOI: 10.3390/math14030487.
14. И.Л. Кароль Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. –Доклады АН СССР. Том.XXXVIII, №2, 1953, 197-200.
15. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. - 204 с.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА В ОБЛАСТИ, ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ КОТОРОЙ- ПЕРВАЯ ЧЕТВЕРТЬ ПЛОСКОСТИ

Бектошева Ш. А.[1], Нишонов Н.[2]
[1]PhD докторант КГУ, [2]магистрант ФерГУ.
https://doi.org/10.5281/zenodo.20595059

Аннотация.*В теории уравнений смешанного типа очень много работ в ограниченных областях с гладкой границей ограниченной нормальной кривой для уравнений смешанного типа первого и второго рода. В данной работе для уравнения смешанного типа второго рода в неограниченной области эллиптическая часть которой является первой четвертью плоскости, исследуется задача Трикоми. Единственность решения задачи доказывается с помощью принципа экстремума.*

Ключевые слова: *задача Трикоми, уравнение смешанного типа второго рода, принцип экстремума, первая четверть плоскости.*

ВВЕДЕНИЕ.

Новым этапом в развитии теории краевых задач для уравнений смешанного типа являются работы М.А. Лаврентьева [1], Л. Берс [2], Ф.И. Франкля [3] и др. где указаны на важность проблемы, в частности, задачи Трикоми, в связи трансзвуковой газовой динамикой, с магнитогидродинамическими течениями с переходом через скорость звука и скорость Альфена, с теорией бесконечно малых изгибаний поверхностей и с многими другими вопросами механики. Следует отметить, что подавляющая часть работ по уравнениям смешанного типа относится к исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа первого рода то есть рассматривались лишь уравнения у которых касательная к параболической линии ни в одной точке не совпадает с характеристическим направлением уравнения в этой точке [4-9]. Известно, что задачи Трикоми возникают в различных приложениях, включая аэродинамику (например, при исследовании течений газа со сверхзвуковыми скоростями) и другие области, где необходимо учитывать изменение типа уравнения в разных областях [10-11]. Для уравнения смешанного типа второго рода в неограниченных областях , когда эллиптическая часть смешанной области является вертикальной или горизонтальной полуполосой исследована в работах [12-13].

Задача Трикоми для уравнения смешанного типа первого рода в неограниченной области, когда эллиптическая часть области является первой четвертью плоскости исследована в работе [9]. В данной работе эта задача исследуется для уравнения смешанного типа второго рода.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + \operatorname{sign} y \,|y|^m u_{yy} = 0, \quad 0 < m < 1 \qquad (1)$$

в неограниченной смешанной области $\Omega=\Omega_1\cup l_0\cup\Omega_2$, где $\Omega_1=\{(x,y):0<x<+\infty,0<y<+\infty\}$, $l_0=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\}$ а Ω_2 - область полуплоскости $y<0$, ограниченная отрезком AB оси Ox и двумя характеристиками

$$AC:x-\left[2/(2-m)\right](-y)^{(2-m)/2}=0,\ BC:x+\left[2/(2-m)\right](-y)^{(2-m)/2}=1$$

уравнения (1), выходящими из точки $C\left(\frac{1}{2};-\left(\frac{2-m}{4}\right)^{\frac{2}{2-m}}\right)$. Далее, положим

$$\beta=\frac{m}{2(m-2)},\ -\frac{1}{2}<\beta<0,$$

$$l_1=\{(x,y):1<x<+\infty,\ y=0\},l_2=\{(x,y):0<y<+\infty,\ x=0\}$$

$$D_{0x}^{\alpha}f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int_0^x(x-t)^{-(k+1)}f(t)dt,\alpha<0\\ \dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}D_{0x}^{\alpha-(n+1)}f(x),\alpha>0\end{cases}$$

где α -любое действительное число, а n -целая часть $\alpha\geq n$.

В полуплоскости $y<0$ уравнение (1) принимает вид

$$u_{xx}-(-y)^m u_{yy}=0, \qquad (2)$$

В характеристических координатах

$$\xi=x-\left[2/(2-m)\right](-y)^{(2-m)/2},\ \eta=x+\left[2/(2-m)\right](-y)^{(2-m)/2} \qquad (3)$$

уравнение (1) переходит в уравнение Эйлера-Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0$$

Известно, что обобщенное решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$\lim_{y\to0}u(x,y)=\tau(x),\ \ 0\leq x\leq1; \qquad (4)$$

$$\lim_{y\to0}u_y(x,y)=\left[2(1-2\beta)\right]^{-2\beta}\lim_{\eta\to\xi}(\eta-\xi)^{2\beta}\left(u_\xi-u_\eta\right)=\nu(x),\ \ 0<x<1, \qquad (5)$$

имеет вид [13]:

$$u(\xi,\eta)=k_1\int_0^1\tau(t)\lambda^{\beta}(1-\lambda)^{\beta}d\lambda+\frac{k_1(\eta-\xi)}{2(1+2\beta)}\int_0^1\tau'(t)\lambda^{\beta}(1-\lambda)^{\beta}(2\lambda-1)d\lambda-$$

$$-k_2(\eta-\xi)^{1-2\beta}\int_0^1\nu(t)\lambda^{-\beta}(1-\lambda)^{-\beta}d\lambda$$

где $t=\xi+(\eta-\xi)\lambda$, $k_1=\dfrac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)}$, $k_2=\dfrac{\left[2(1-2\beta)\right]^{2\beta}\Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma^2(1-\beta)}$.

Переходя обратно к переменным x,y по формулам (3) имеем

$$u(x,y)=k_1\int_0^1\tau(t)\lambda^{\beta}(1-\lambda)^{\beta}\,d\lambda+\frac{k_1}{1-m}(-y)^{1-m/2}\int_0^1\tau'(t)\lambda^{\beta}(1-\lambda)^{\beta}(2\lambda-1)d\lambda+$$

$$+\left[2(1-2\beta)\right]^{1-2\beta}k_2y\int_0^1\nu(t)\lambda^{-\beta}(1-\lambda)^{-\beta}\,d\lambda \qquad (6)$$

где $t=x+(1-2\beta)(-y)^{1-\frac{m}{2}}(2\lambda-1)$.

При любых $\tau(x)\in C^3[0,1]$ и $\nu(x)\in C^2[0,1]$ решение (6) является дважды непрерывно дифференцируемым решением задачи Коши для уравнения (2) с начальными данными (4) и (5).

В области Ω_2 рассмотрим следующий класс R обобщенных решений задачи Коши введенный в работе [14]. Если $\tau(x)$ есть интеграл дробного порядка от некоторой функции $T(x)$ непрерывной в интервале $(0,1)$ и интегрируемой на сегменте $[0,1]$, то есть

$$\tau(x)=\int_0^x T(t)(x-t)^{-2\beta}\,dt \qquad (7)$$

Без ограничения общности будем считать $\tau(0)=0$, из (7) легко следует что $\tau(x)\in C[0,1]$ и существует $\tau'(x)\in C(0,1)$. Функция $\nu(x)$ непрерывна в интервале $(0,1)$ и интегрируема на сегменте $[0,1]$. Тогда решение задачи Коши принадлежащее классу R имеет вид:

$$u(\xi,\eta)=\int_0^{\xi}T(\lambda)(\eta-\lambda)^{-\beta}(\xi-\lambda)^{-\beta}\,d\lambda+\int_{\xi}^{\eta}N(\lambda)(\eta-\lambda)^{-\beta}(\xi-\lambda)^{-\beta}\,d\lambda \qquad (8)$$

где $N(\lambda)=\dfrac{1}{2\cos\pi\beta}T(\lambda)-k_2\nu(\lambda)$, причем функции $T(x)$ и $\nu(x)$ непрерывны в интервале $(0,1)$ и интегрируемы на сегменте $[0,1]$, $\tau(0)$ обращается в нуль порядка не меньше -2β.

Из (8) основное функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ полученное из области гиперболичности Ω_2 уравнения (1), было получено И.Л. Каролем [14]:

$$\tau(x)=k_3\int_0^x\nu(t)(x-t)^{-2\beta}\,dt+F(x),0\le x\le 1; \qquad (9)$$

где $F(x)=\dfrac{2\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+2\beta)}D_{0x}^{2\beta-1}\left[x^{\beta}D_{0x}^{1-\beta}\psi(x)\right]$,

$$k_3=\frac{\left[2(1-2\beta)\right]^{2\beta}\sin\pi\beta\Gamma^2(\beta)}{2\pi\Gamma(2\beta)}.$$

Задача T^{∞}**.** Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$, где $\overline{\Omega}=\overline{\Omega_2}\cup\Omega_1\cup\overline{l_1}\cup\overline{l_2}$;

2) $u(x,y)\in C^2(\Omega_1)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области Ω_1;

3) является обобщенным решением класса R в области Ω_2;

4) удовлетворяет краевым условиям

$u(0,y)=\varphi_1(y)$, $0\le y<+\infty$, $u(x,0)=\varphi_2(x)$ $1\le x<+\infty$ (10)

$\lim\limits_{r\to\infty}u(x,y)=0$, $r^2=x^2+\dfrac{4}{(2-m)^2}y^{2-m}$ (11)

$u(x,y)\Big|_{AC}=\psi(x),0\le x\le 1/2$, (12)

где $\psi(x)$- заданная функция, и на отрезке $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ имеет ограниченную и интегрируемую вторую производную; $\varphi_1(y)\in C[0,+\infty)$ и $\lim\limits_{y\to\infty}\varphi_1(y)=0$; $\varphi_2(x)\in C[1,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi_2(x)=0$; выполняются условия согласования $\varphi_1(0)=\psi(0)$.

На линии $y=0$ параболического вырождения уравнения (1) выполняются условия склеивания:

$u(x,-0)=u(x,+0)$, $u_y(x,+0)=-u_y(x,-0)$.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

ТЕОРЕМА. Задача T^{∞} имеет не более одного решения.

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ решение однородной задачи T^{∞} для уравнения (1) из класса R_2 в области Ω, причем

$u(0,y)=0$, $0\le 0<+\infty$, $u(x,0)=0$ $1\le x<+\infty$ (13)

$\lim\limits_{r\to\infty}u(x,y)=0$, $r^2=x^2+\dfrac{4}{(2-m)^2}y^{2-m}$ (14)

$$u\big|_{AC}=0,0\le x\le\frac{1}{2}. \qquad (15)$$

При этом имеем $\psi(x)\equiv 0$. Поэтому соотношение (12) принимает вид

$$\tau(x)=k_3\int_0^x \nu(t)(x-t)^{-2\beta}\,dt, \qquad (16)$$

Из (16) применяя формулу обращения интегрального уравнения Абеля получаем

$$\nu(x)=\frac{\sin 2\beta}{\pi k_3}\left[(1-2\beta)\int_0^x\frac{\tau(x)-\tau(t)}{(x-t)^{2-2\beta}}dt+\frac{\tau(x)}{x^{1-2\beta}}\right] \qquad (17)$$

Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Предположим противное, то есть $u(x,y)\not\equiv 0$. Тогда найдется такое число $r>0$, что существует такая область Ω_r ограниченная нормальным контуром $S_r: x^2+\frac{4}{(2-m)^2}y^{2-m}=r^2, y>0$, отрезками $l_{1r}=\{(x,y):1\le x\le r,\ y=0\}$ $l_{2r}=\{(x,y):x=0,0\le y\le\frac{(2-m)^2}{4}r^{\frac{2}{2-m}}\}$, и характеристиками AC и BC уравнения (1) где верно что $\max|u(x,y)|>0$. В силу условия (15) из принципа экстремума для гиперболических уравнений[9] следует что функция $u(x,y)$ положительный максимум и отрицательный минимум в области $\overline{\Omega_{2r}}=\overline{\Omega_r}\cap(y<0)$ достигает на отрезке $\overline{l_0}=\{(x,y):0\le x\le 1,\ y=0\}$. С другой стороны в силу принципа экстремума для эллиптических уравнений [15] функция $u(x,y)$ положительный максимум и отрицательный минимум не достигает в области $\Omega_{1r}=\Omega_r\cap(y>0)$. Предположим, что положительный максимум (отрицательный минимум) достигает в точке $P(x_0,0)$ интервала $l_0=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\}$. Тогда из формулы (17) при $x=x_0$ в силу того, что $\tau(x_0)>0$, $\tau(x_0)-\tau(t)>0$ следует что $\nu(x_0)>0$ ($\nu(x_0)<0$). Это противоречит принципу Зарембо-Жиро [15] откуда следует что $\nu(x_0)<0$ ($\nu(x_0)>0$). Поэтому, на интервале $l_0=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\}$ экстремальных значений нет. В силу условий (13) экстремальные значения не достигаются и на l_1 и l_2, кроме этого $u(0,0)=0$. Следовательно, функция $u(x,y)\in C(\overline{\Omega_r})$ в области $\overline{\Omega_r}$ положительный максимум и отрицательный минимум достигает на $\overline{S_r}$, то есть верно следующее неравенство $0\le|u(x,y)|\le\max\limits_{\overline{S_r}}|u(x,y)|$. Делая аналогичные рассуждения точно также для любого $d>r$, получим в области $\overline{\Omega_d}$ неравенство $0\le|u(x,y)|\le\max\limits_{\overline{S_d}}|u(x,y)|$. Учитывая, что $\overline{\Omega_r}\subset\overline{\Omega_d}$ и $u(x,y)\not\equiv const$

имеем $0 < \max\limits_{\overline{S}_r} |u(x,y)| \le \max\limits_{\overline{S}_d} |u(x,y)|$. Последнее неравенство противоречит условию (14). Следовательно, наше предположение неверно, то есть $u(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \overline{\Omega}$.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А., Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа // Доклады АН СССР. 1950. Т. 70. №3. – С. 485-488.
2. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. — М.: Иностранная литература, 1961. — 208 с
3. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. Москва. Наука. 1973. –712 с.
4. Денисова З.Г. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения в неограниченной области // Дифференциальные уравнения. –Минск, 1978. Т. 14. №1. – С. 170-173.
5. Репин О.А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой - полуполоса // Дифференциальные уравнения. –Минск, 1996. Т. 32. №4. – С. 37-43.
6. Севостьянов Г.Д. Две краевые задача Трикоми в безграничной области // Известия высших учебных заведений. 1967. 1(56) – С. 95-101.
7. Зуннунов Р.Т. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в неограниченной области // Узбекский Математический журнал.-Ташкент, 2001. №2. –С. 39-43.
8. Zunnunov R.T. A Problem with Shiff for Mixed-Type Equation in Domain, the Elliptical Part of Which Is a Horizontal Strip. // Lobachevskii journal of mathematics, Vol. 44 No. 10, 2023. –P.4410-4417.
9. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Высшая школа, 1985. – 304 с.
10. Севостьянов Г.Д. Обтекание профиля звуковой струей газа // ИАН СССР. Серия мех. и жид. газа. 1966. Т 30. №2. – С. 53-59.
11. Фалькович С.В. Об одном случае решения задачи Трикоми // В сборнике «Трансзвуковые течения газа». – Саратов, 1964. – С. 3-8.
12. Р. Т. Зуннунов, А. А. Эргашев, “Задача со смещением для уравнения смешанного типа второго рода в неограниченной области”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2016, № 1(12), 26–31.
13. Zunnunov R.T., Parovik R.I., Ergashev A.A. A Bitsadze–Samarskii-Type Problem for a Second-Kind Mixed-Type Equation in a Domain with a Horizontal Half-Strip as Its Elliptic Part./ Mathematics 2026, 14(3), 487; DOI: 10.3390/math14030487.
14. И.Л. Кароль Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. –Доклады АН СССР. Том.XXXVIII, №2, 1953, 197-200.
15. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. - 204 с.

ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ ФУНКЦИОНАЛ ХОССАЛАРИ ВА УЛАРНИНГ НАЗАРИЙ АСОСЛАРИ

Ботиралиева Мафтуна Ботирали қизи[1], Пўлатов Дилшоджон Қахоривич[2]
[1]ҚДУ математика кафедраси ўқитувчиси, [2]ҚДУ математика кафедраси талабаси
https://doi.org/10.5281/zenodo.20595089

Аннотация. *Ушбу мақолада параметрга боғлиқ хосмас интегралларнинг асосий функционал хоссалари ўрганилган. Хусусан, параметрга боғлиқ интегралларнинг лимитга ўтиши, узлуксизлиги, дифференциалланиши ва интегралланиши масалалари таҳлил қилинади. Интегралларнинг текис яқинлашув шартлари ҳамда уларнинг назарий асослари ёритилган.*

Калит сўзлар: *параметрга боғлиқ интеграл, хосмас интеграл, лимит, узлуксизлик, дифференциаллаш, интегралланиш, текис яқинлашув, математик анализ.*

Аннотация.*В данной статье рассматриваются основные функциональные свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра. В частности, анализируются вопросы существования предела, непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости интегралов, зависящих от параметра. Рассматриваются условия равномерной сходимости интегралов и их теоретические основы. На основе приведённых теорем обосновываются свойства несобственных интегралов с параметром и приводятся соответствующие примеры.*

Ключевые слова: *интеграл с параметром, несобственный интеграл, предел, непрерывность, дифференцирование, интегрирование, равномерная сходимость, математический анализ.*

Abstract. *This article studies the main functional properties of improper integrals depending on a parameter. In particular, the issues of the existence of limits, continuity, differentiability, and integrability of parameter-dependent integrals are analyzed. The conditions of uniform convergence of integrals and their theoretical foundations are discussed. The properties of improper integrals with parameters are justified based on the presented theorems and illustrated with examples.*

Keywords: *parameter-dependent integral, improper integral, limit, continuity, differentiation, integration, uniform convergence, mathematical analysis.*

Ушбу маърузада параметрга боғлиқ хосмас интеграл

$$F(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

нинг лимити, узлуксизлиги, дифференциалланиши ҳамда интегралланиши масалаларини баён этамиз.

1⁰. $F(y)$ **функциянинг лимити**. Айтайлик, $f(x,y)$ функция

$$M=\{(x,y)\in R^2 : x\in[a,+\infty),\ y\in E\subset R\}$$

тўпламда берилган, $y_0\in R$ эса E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

1-теорема. $f(x,y)$ функция қўйидаги шартларни бажар-син:

1) ҳар бир тайин $y \in E$ да $f(x,y)$ функция x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a,+\infty)$ да узлуксиз;

2) $y \to y_0$ да $f(x,y)$ функция ихтиёрий $[a,t]$ да $(a < t < \infty)$ лимит функция $\varphi(x)$ га текис яқинлашсин;

3) ушбу $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда $y \to y_0$ да $F(y)$ функция лимитга эга ва

$$\lim_{y \to y_0} F(y) = \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

бўлади.

◄Теореманинг 1- ва 2- шартларининг бажарилишидан $\varphi(x)$ функциянинг $[a,\infty)$ да узлуксиз бўлишини топамиз. Бинобарин, $\varphi(x)$ ихтиёрий $[a,t]$ да $(a < t < \infty)$ интегралланувчи бўлади.

Модомики,

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи экан, унда 77-маърузадаги 1-теоремага кўра

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $t' > \delta$, $t'' > \delta$, $\forall t', t''$, $\forall y \in E$:

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

бўлади.

Кейинги тенгсизликда, $y \to y_0$ да лимитга ўтсак, у ҳолда

$$\left| \int_{t'}^{t''} \varphi(x)dx \right| \le \varepsilon$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Бундан $\varphi(x)$ функциянинг $[a,\infty)$ да интегралланувчилиги келиб чиқади.

Ушбу

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx \right|$$

айирмани қараймиз. Унинг учун қуйидаги тенгсизлик бажарилади:

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{+\infty}\varphi(x)dx\right| \le \int_a^{t}\left|f(x,y)-\varphi(x)\right|dx + \left|\int_t^{+\infty} f(x,y)dx\right| + \left|\int_t^{+\infty}\varphi(x)dx\right|.$$

$(a < t < \infty)$ (1)

Бу тенгсизликнинг ўнг томонидаги қўшилувчиларни баҳолаймиз. $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ интеграл E тўпламда текис яқинлашув-чи бўлганлиги сабабли,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0,\ \forall t > \delta_1, \forall y \in E$

$$\left|\int_t^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

бўлади.

$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$

интеграл яқинлашувчи бўлганлиги сабабли

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0,\ \forall t > \delta_2$:

$$\left|\int_t^{+\infty}\varphi(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (3)$$

бўлади.

Равшанки, $\forall t > \delta_0$: $(\delta_0 = \max(\delta_1\delta_2))$ да (2) ва (3) тенсизликлар бир йўла бажарилади. Функция $y \to y_0$ да $f(x,y)$ $[a,t]$ да $(t > \delta_0)$ лимит функция $\varphi(x)$ га текис яқинлашувчи бўлганлиги сабабли

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' = \delta'(\varepsilon) > 0,\ |y - y_0| < \delta'\ \ \forall y \in E, \forall x \in [a,t]\ \ (a < t < \infty)$

$$\left|f(x,y) - \varphi(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3(t-a)} \qquad (4)$$

бўлади.

(1), (2), (3) ва (4) муносабатлардан

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{+\infty}\varphi(x)dx\right| < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Демак

$$\lim_{y\to y_0} F(y) = \lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty}\varphi(x)dx\,.\ \blacktriangleright$$

Кейинги тенгликни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]dx\,.$$

1- мисол. Ушбу

$$\lim_{y\to+0}\int_a^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx = \int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

тенглик исботлансин.

◄ Агар $\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ функциянинг $x=0$ нуқтадаги қиймати-ни $\varphi(0)=1$ деб олинса, унда

$$f(x,y)=e^{-xy}\frac{\sin x}{x}$$

функция $\{(x,\ y)\in R^2 : x\in[0,+\infty),\ y\in[0,+\infty)\}$ тўпламда узлуксиз бўлади.

Равшанки, ҳар бир тайин $y\in[0,+\infty)$ да $f(x,\ y)$ функция x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[0,+\infty)$ да узлуксиз бўлиб, $y\to+\infty$ да бу функция ихтиёрий $[0,\ t]$ да $(0<t<+\infty)$ $\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ функцияга текис яқинлашади.

Энди,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx$$

хосмас интегрални параметр y бўйича $[0,+\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз.

Агар Абель аломатида $f(x,\ y)$ функция сифатида $\dfrac{\sin x}{x}$, $g(x,\ y)$ функция сифатида e^{-xy} функциялар олинса, улар учун Абель аломатининг барча шартларининг ўринли бўлишини кўрсатиш қийин эмас. Демак, аломатга кўра

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx$$

интеграл текис яқинлашувчи.

Юқорида келтирилган 1-теоремага биноан

$$\lim_{y\to+0}\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\left(\lim_{y\to+0} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\right)dx$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{y\to+0}\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

бўлиши келиб чиқади. ►

2⁰. $F(y)$ функциянинг узлуксизлиги. Айтайлик, $f(x,y)$ функция

$$M_0=\{(x,y)\in R^2 : x\in[a,+\infty),\ \ y\in[c,d]\}$$

тўпламда берилган бўлсин.

2-теорема. Агар $f(x,y)$ функция M_0 тўпламда узлуксиз бўлиб,

$$F(y)=\int_a^{+\infty} f(x,\ y)dx$$

интеграл $[c,d]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $F(y)$ функция $[c,d]$ да узлуксиз бўлади.

◀Ихтиёрий $y_0 \in [c,d]$, $y_0 + \Delta y \in [c,d]$ нуқталарни олиб, $F(y)$ функциянинг орттирмасини топамиз:

$$\Delta F(y_0) = F(y_0 + \Delta y) - F(y_0) = \int_a^{+\infty} [f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)]dx .$$

Шартга кўра $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ интеграл $[c,d]$ да текис яқинла-шувчи. Унда

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall t_0 > \delta$, $\forall\ y \in [c,d]$:

$$\left| \int_{t_0}^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (5)$$

бўлади. Равшанки, $f(x,y)$ функция

$$M_{t_0} = \left\{ (x,y) \in R^2 : x \in [a,t_0],\ y \in [c,d] \right\}\ (a < t_0 < +\infty)$$

тўпламда текис узлуксиз бўлади. Унда

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, $\Delta y < \delta_1(\varepsilon)$

$$|f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{3(t_0 - a)} \qquad (6)$$

бўлади. Агар $\delta_0 = \max\{\delta, \delta_1\}$ дейилса унинг учун (5) ва (6) тенгсизликлар бир йўла бажарилади. (5) ва (6) муносабатларни эътиборга олиб топамиз:

$$|\Delta F(y_0) =| = \left| \int_a^{+\infty} [f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)]dx \right| \le$$

$$\le \int_a^{t_0} |f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)|dx + \left| \int_{t_0}^{+\infty} f(x, y_0 + \Delta y)dx \right| + \left| \int_{t_0}^{+\infty} f(x, y_0) \right| < \varepsilon.$$

Демак,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \Delta F(y_0) = 0 .$$

3⁰. $F(y)$ функцияни дифференциаллаш. Фараз қилайлик $f(x,y)$ функция M_0 тўпламда берилган бўлсин.

3-теорема. $f(x,y)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $f(x,y)$ функция M_0 тўпламда узлуксиз;

2) $f'_y(x,y)$ хусусий ҳосила мавжуд ва у M_0 тўпламда узлуксиз;

3) Ҳар бир тайин $y \in [c,d]$ да

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

интеграл яқинлашувчи;

4) Ушбу

$\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$

интеграл $[c,d]$ да текис яқинлашувчи.

У ҳолда $F(y)$ функция $[c,d]$ да $F'(y)$ ҳосилага эга ва

$$F'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$$

бўлади.

◄ $y_0 \in [c,d],\ y_0 + \Delta y \in [c,d]$ нуқталарни олиб, топамиз:

$$\frac{F(y_0+\Delta y)-F(y_0)}{\Delta y} = \int_a^{+\infty} \frac{f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)}{\Delta y}dx.$$

Лагранж теоремасига кўра

$$\frac{f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)}{\Delta y} = f'_y(x,y_0+\theta\Delta y),\ (0<\theta<1),$$

$$\frac{F(y_0+\Delta y)-F(y_0)}{\Delta y} = \int_a^{+\infty} f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)dx$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{F(y_0+\Delta y)-F(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\int_a^{+\infty} f'_y(x,y_0+\theta\,\Delta y)dx. \qquad (7)$$

Шартга кўра $f'_y(x,y)$ функция M_0 тўпламда узлуксиз. Кантор теоремасига биноан у

$$M_t = \{(x,y)\in R^2 : x\in[a,t]\ \ y\in[c,d]\}\ (a<t<\infty)$$

тўпламда текис узлуксиз бўлади. Унда

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0, |\Delta y|<\delta(\varepsilon)\ \forall x\in[a,t]$$

$$\left|f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)-f'_y(x,y_0)\right|<\varepsilon$$

бўлади. Демак $\Delta y\to 0$ да $f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)$ функция $f'_y(x,y_0)$ га текис яқинлашади. Шартга кўра

$\int_a^{+\infty} f'_y(x,y_0)dx$

интеграл текис яқинлашувчи. Унда

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,\ t'>\delta; t''>\delta;\ \forall t', t'',\ \forall\ y\in[c,d]$:

$$\left|\int_{t'}^{t''} f'_y(x,y)dx\right|<\varepsilon$$

жумладан,

$$\left|\int_{t'}^{t''} f'_y(x,y_0+\theta\,\Delta y)dx\right|<\varepsilon$$

бўлади. Кейинги тенгсизликнинг бажарилишидан эса

$$\int_a^{+\infty} f'_y(x, y_0 + \theta\Delta y)dx$$

интегралнинг текис яқинлашувилиги келиб чиқади. Ушбу маърузада келтирилган 1-теоремани (7) тенгликнинг ўнг томонига қўллаб, топамиз.

$$\lim_{\Delta y\to 0}\int_a^{+\infty} f'_y(x, y_0 + \theta\Delta y)dx = \int_a^{+\infty}[\lim_{\Delta y\to 0} f'_y(x, y_0 + \theta\Delta y)]dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y_0)dx. \quad (8)$$

(7) ва (8) муносабатлардан

$$F'(y_0) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y_0)dx \quad (9)$$

бўлиши келиб чиқади.

(9) муносабатни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dx.$$

Бу дифференциаллаш амалини интеграл остига ўтказиш қоидасини ифодалайди. ►

4⁰. $F(y)$ **функцияни интегралаш**. Айтайлик, $f(x, y)$ функция

$$M_0 = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a,+\infty),\ y \in [c, d]\}$$

тўпламда берилган бўлсин.

4-теорема. Агар $f(x, y)$ функция M_0 тўпламда узлуксиз ва $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ интеграл $[c, d]$ да текис яқинлшувчи бўлса, у ҳолда $F(y)$ функция $[c, d]$ да интегралланувчи ва

$$\int_c^d F(y)dy = \int_c^d[\int_a^{+\infty} f(x, y)dx]dy = \int_a^{+\infty}[\int_c^d f(x, y)dy]dx$$

бўлади.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. **Фихтенгольц Г.М.** Дифференциал ва интеграл ҳисоб курси. – Москва: Наука, 1986.
2. **Демидович Б.П.** Математик анализдан масалалар ва машқлар тўплами. – Москва: Наука, 1990.
3. **Зорич В.А.** Математик анализ. – Москва: МЦНМО, 2002.
4. **Шипачев В.С.** Олий математика. – Москва: Высшая школа, 2005.
5. **Ильин В.А., Позняк Э.Г.** Математик анализ асослари. – Москва: Физматлит, 2004

BIR JINSLI BENNEY-LUKE TIPIDAGI KASR TARTIBLI TENGLAMA UCHUN VART BO‘YICHA NOLOKAL MASALA

Dexqonov Xusan Tursunovich[1], Abduraxmonov Dilmurod Akramaliyevich[2], Muxiddinova Umida Baxromjon qizi[3]

[1]Qo‘qon davlat universiteti o‘qituvchisi (PhD),

[2]Qo‘qon davlat universiteti o‘qituvchisi

[3]Qo‘qon davlat universiteti matematika yo‘nalishi talabasi

https://doi.org/10.5281/zenodo.20595114

Annotatsiya. *Ushbu maqolada* $D_t^\rho V(t)+A(D_t^\rho V(t))+A^2(D_t^\rho V(t))+AV(t)=0$, $0<\rho<1$ *ko‘rinishidagi kasr tartibli tenglama uchun vaqt bo‘yicha* $0<t<T$, $V(T)=\chi V(+0)+\psi$ *nolokal shartni qanotlantruvchi yechimni topish masalasi o‘rganilgan, bu yerda* χ *va* T, *berilgan sonlar. Maqolada* χ *parametrni yechimning mavjudligi va yagonaligiga ta’siri o‘rganilgan.*

Kalit so‘zlar: *Nolokal masala, Hilbert fazosi, Benney-Luke tipidagi tenglama, Caputo ma’nosidagi hosila*

Аннотация. *В данной статье рассматривается задача нахождения решения дробного дифференциального уравнения вида* $D_t^\rho V(t)+A(D_t^\rho V(t))+A^2(D_t^\rho V(t))+AV(t)=0$, $0<\rho<1$, *удовлетворяющего по времени нелокальным условиям* $0<t<T$, $V(T)=\chi V(+0)+\psi$, *где* χ *и* T *— заданные числа. В работе изучается влияние параметра* χ *на существование и единственность решения.*

Ключевые слова и выражения: *нелокальные задачи, производные Хильфера, уравнения типа Бенни — Люка, производная Капуто, обратные задачи.*

Abstract. *This paper studies the problem of finding a solution satisfying the non-local conditions* $0<t<T$, $V(T)=\chi V(+0)+\psi$ *with respect to time is studied for the fractional-order equation of the form* $D_t^\rho V(t)+A(D_t^\rho V(t))+A^2(D_t^\rho V(t))+AV(t)=0$, $0<\rho<1$, *where* χ *and* T *are given constants. The influence of the parameter* χ *on the existence and uniqueness of the solution is investigated in the article.*

Keywords and phrases*: Non-local problems, the Hilfer derivatives, Benney-Luke type equations, Caputo, inverse problems.*

Aytaylik, $h(t)$ vektor funksiya $[0,+\infty)$ da aniqlangan bo‘lsin. $h(t)$ funksiyaning Kaputo ma’nosida ρ kasr tartibli hosilasi esa quyidagicha ko‘rinishda aniqlanadi:

$$I_t^\rho h(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\rho)}\int_0^t\frac{h'(\xi)}{(t-\xi)^\rho}d\xi,\ t>0,$$

bu yerda $\Gamma(\beta)$ - Eylerning gamma funksiyasi.

Quyidagi masalani qaraylik

$$\begin{cases} D_t^{\rho}V(t)+A(D_t^{\rho}V(t))+A^2(D_t^{\rho}V(t))+AV(t)=0, \quad 0<t<T; \\ V(T)=\chi V(+0)+\psi. \end{cases} \tag{1}$$

bu yerda $f(t)\in C([0,T];H)$, $\psi\in H$ berilgan funksiyalar va χ o‘zgarmas son.

Aytaylik, H separabl Hilbert fazosi va $A:H\to H$ operator $D(A)\subset H$ aniqlanish sohasiga ega o‘z-o‘ziga qo‘shma, musbat, chegaralanmagan ixtiyoriy operator bo‘lsin. Faraz qilaylik, A operator H fazoda to‘la ortonormal $\{\upsilon_k\}$ xos funksiyalar sistemasiga va mos ravishda $\{\lambda_k\}$ musbat xos sonlar to‘plamiga ega bo‘lsin. Shu bilan birga A operator xos sonlari ketma-ketligi noldan boshqa limit nuqtaga ega bo‘lmasin. Xos qiymatlarni qayta nomerlash yordamida ularni kamaymaydigan qilib nomerlab olamiz, ya’ni $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\to+\infty$ kabi yozib olamiz.

Keling, H Hilbert fazosida A operatornig darajasi tushunchasini eslatib o‘taylik. τ ixtiyoriy haqiqiy son bo‘lsin. Biz H da A operatorning darajasini quyidagicha kiritamiz:

$$A^{\tau}h=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\tau}h_k\upsilon_k,$$

bu yerda $h_k=(h,\upsilon_k)$ lar $h\in H$ elementning Furye koeffitsiyentlari. Ushbu operatorning aniqlanish sohasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$D(A^{\tau})=\{h\in H:\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{2\tau}\,|\,h_k\,|^2<\infty\}.$$

$h\in D(A^{\tau})$ element uchun normani quyidagicha kiritamiz

$$\|h\|_{\tau}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{2\tau}\,|\,h_k\,|^2=\|A^{\tau}h\|^2$$

va bu norma bilan birgalikda $D(A^{\tau})$ Hilbert fazosiga aylanadi.

$C((0,T);H)$ orqali qiymatlari H da yotuvchi $t\in(0,T)$ oraliqda uzluksiz $V(t)$ funksiyalar to‘plamini belgilaymiz.

Ta’rif. Agar $V(t)\in AC([0,T];H)$ funksiya $A^2(D_t^{\rho}V(t))$, $A(D_t^{\rho}V(t))$, $D_t^{\rho}V(t)$, $AV(t)\in C((0,T);H)$ xossalarga ega bo‘lib, (1) masalaning shartlarini qanotlantrsa u holda bu funksiya (1) nolokal masalaning yechimi deyiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. D.J. Benney and J.C.Luke, “On the interactions of permanent waves of finite amplitude,” Mathematical Physics, 43, 309-313 (1964).

2. J.J.Stoker, Water Waves, (Inters Clence, New York, 1957). 2. J.V.Wehausen and E.V.Laitone, “Surface Waves,” Handbuch der Physik, Vol. 9, Berhn, Springer Verlag, (1960).

3. T.K.Yuldashev and F.D.Rakhmonov, “On a Benney-Luke type differential equation with nonlinear boundary value conditions,” Lobachevskii Journal of Mathematics, 42, 15, 3761-3772, (2021).

4. M.Dzherbashian, Integral transforms and representation of functions in the complex domain, Nauka, M., Ed.; (1966), Available online: https://www.twirpx.com/file/1753304/, (accessed on 1 May 2021), (In Russian).

$k_g = 0$, $\nu = 0$ ВА $\varkappa_g = 0$ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ ЕЧИМИ ВА УНДАН КЕЛИБ ЧИҚАДИГАН ДАСТЛАБКИ ХУЛОСАЛАР

Эркин Эргашевич Жумаев[1], Худойбердиев Нортўра Қобилович[2], Ғоффоров Ҳусайн Алияр ўғли[3]

[1]Термиз давлат педагогика институти,
математика ва информатика кафедраси, Доцент,
[2]ўқитувчи, Термиз давлат педагогика институти,
математика ва информатика кафедраси,
[3]ўқитувчи, Термиз давлат педагогика институти,
математика ва информатика кафедраси

https://doi.org/10.5281/zenodo.20595146

Аннотация: *в работе разработана, что действительно дают три прпостейших натуральных уравнения* $k_g = 0$, $\nu = 0$ *и* $\varkappa_g = 0$ *и они определяют важнейшие геометрически инвариантные линии на поверхности, проведена анализ этих уравнений и определяемых ими линий и выбрана из них те, которые приведут к канонизации репера поверхности.*

Ключевая слова: *уравнения, инвариант, линия, поверхность, репер.*

Аннотация: *ишда ҳақиқатан ҳам* $k_g = 0$, $\nu = 0$ ***ва*** $\varkappa_g = 0$ *тенгламаларнинг текисликдаги чизиқларнинг муҳим инвариантларини аниқлаши ишлаб чиқилган, бу тенгламалар тўла таҳлил қилинган ва сирт тенгламаларини содда кўринишга келиши танланган.*

Kalit so‘zlar: *тенглама, инвариант, чизиқ, сирт, репер.*

Учта содда $k_g = 0$, $\nu = 0$ ва $\varkappa_g = 0$ натурал тенгламанинг ечими сирта ётган чизиқнинг деривацион формулаларини беради. Улар чизиқнинг муҳим геометрик инвариантларни аниқлайди. Бу тенглама билан аниқланувчи чизиқларнинг қайси бири сирт реперининг соддалашишига олиб келади? Бу саволга жавоб бериш учун ишни асимптотик чизиқлардан бошлаймиз. Равшанки унинг тенгламаси $\nu = 0$. Сирт ярим каноник реперга кўчирилганда сиртдаги ихтиёрий $u = u(t), v = v(t)$ чизиқнинг деривацион формулалари қуйидагига тенг бўлсин:

$$\begin{aligned} \bar{r}_u &= a\bar{e}_1; & \bar{r}_v &= b\bar{e}_2; \\ \bar{e}_{1u} &= \alpha_{12}\bar{e}_2 + \alpha_{13}\bar{e}_3; & \bar{e}_{1v} &= \beta_{12}\bar{e}_2 + \beta_{13}\bar{e}_3; \\ \bar{e}_{2u} &= -\alpha_{12}\bar{e}_1 + \alpha_{23}\bar{e}_3; & \bar{e}_{2v} &= -\beta_{12}\bar{e}_1 + \beta_{13}\bar{e}_3; \\ \bar{e}_{3u} &= -\alpha_{13}\bar{e}_1 - \alpha_{23}\bar{e}_2; & \bar{e}_{3v} &= -\beta_{13}\bar{e}_1 - \beta_{23}\bar{e}_2. \end{aligned}$$

Агар бу чизиқнинг ёпишма текислиги сиртнинг уринма текислиги билан устма-уст тушса, у ҳолда бу чизиқ асимптотик дейилади. Ёпишма текислик эса иккита $\frac{d\bar{r}}{dt}$ ва $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ вектор билан аниқланади. Бирилган чизиқ учун мураккаб функция дифференциалини топиш қоидасига кўра

$\frac{d\bar{r}(u(t),\ v(t))}{dt} = \bar{r}_u \frac{du}{dt} + \bar{r}_v \frac{dv}{dt}$, $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\bar{r}_u \frac{du}{dt} + \bar{r}_v \frac{dv}{dt}\right) = \left(\bar{r}_{uu}\frac{du}{dt} + \bar{r}_{uv}\frac{dv}{dt}\right)\frac{du}{dt} +$ $+ \bar{r}_u \frac{d^2u}{dt^2} + \left(\bar{r}_{vu}\frac{du}{dt} + \bar{r}_{vv}\frac{dv}{dt}\right)\frac{dv}{dt} + \bar{r}_v \frac{d^2v}{dt^2}$ ни топамиз. Уринма текислик $\bar{r}_u$ ва $\bar{r}_v$ векторлар билан аниқланади, унда унинг ёпишма текислик билан устма-уст тушиш учун тўртта $\frac{d\bar{r}}{dt}$, $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$, $\bar{r}_u$ ва $\bar{r}_v$ вектор компланар бўлиши керак. $\frac{d\bar{r}(u(t),\ v(t))}{dt} = \bar{r}_u \frac{du}{dt} + \bar{r}_v \frac{dv}{dt}$ тенглик $\frac{d\bar{r}}{dt}$ ни $\bar{r}_u$ ва $\bar{r}_v$ векторлар билан компланар эканлигини кўрсатади. Буни $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ вектор учун ҳам талаб қиламиз. Бу $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}(\bar{r}_u \times \bar{r}_v) = 0$ ни беради. Бундан ташқари охирги иккита тенгликдан($\bar{r}_u \frac{d^2u}{dt^2}$ ва $\bar{r}_v \frac{d^2v}{dt^2}$ ҳадлар $\bar{r}_u \times \bar{r}_v$ га кўпайтирилганда нолга тенг бўлади) бизнинг чизиғимиз учун қуйидаги $\left(\bar{r}_{uu}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\bar{r}_{uv}\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + \bar{r}_{vv}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right)\cdot(\bar{r}_u \times \bar{r}_v) = 0$ дифференциал тенглама ҳосил бўлади. Нормал векторнинг таърифига кўра $\bar{e}_3 \parallel \bar{r}_u \times \bar{r}_v$.

Агар $\bar{r}_{uu}\cdot\bar{e}_3 = L$, $\bar{r}_{uv}\cdot\bar{e}_3 = M$, $\bar{r}_{vv}\cdot\bar{e}_3 = N$ белгилашларни киритсак, бизнинг тенгламамиз $L\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2M\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + N\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0$ кўринишни олади. Бу асимптотик чизиқларнинг дифференциал тенгламасидир.

Ёрдамчи t ўзгарувчи орқали u ёки v ўзгарувчининг бирини белгилаймиз, чизиқ тенгламаси $u = t$, $v = v(t) = v(u)$ кўринишни олади. У ҳолда $\frac{du}{dt} = 1$ ва асимптота тенгламаси $L + 2M\frac{dv}{du} + N\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0$ кўринишга келади. Уни $\frac{dv}{du}$ га нисбатан квадрат тенглама сифатида ечиб $N \neq 0$ бўлганда $\frac{dv}{du} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{N}$ га эга бўламиз.

Агар $M^2 - LN$ дискриминант нолдан кичик бўлса, унда квадрат тенгламанинг ўнг томони мавҳум, бу дифференциал тенгламани ечиш маъноga эга эмас ва ҳеч қандай асмптотик чизиқлар йўқ. $M^2 - LN < 0$ бўлиши мумкинми?

$\bar{r}(u,\ v) = a\sin v\bar{e}(u) + a\cos v\cdot\bar{k}$сфера учун $\bar{r}_u = a\sin v\bar{e}'$, $\bar{r}_v = a\cos v\bar{e} - a\sin v\bar{k}$ $\bar{r}_{uu} = a\sin v\bar{e}'' = -a\sin v\,\bar{e}$, $\bar{r}_{uv} = a\cos v\bar{e}'$, $\bar{r}_{vv} = -a\sin v\bar{e} - a\cos v\bar{k} = -\bar{r}$. Равшанки сфера учун $\bar{e}_3 \parallel \bar{r}_2$, яъни $\bar{e}_3 = q\bar{r}$, бу ерда q скаляр. У ҳолда $L = q(\bar{r}_{uu}\cdot\bar{r}) = -qa^2\sin^2 v$, $M = q(r_{uv}\cdot r) = 0$, $N = q(r_{vv}\cdot r) = -qa^2$. Шунинг учун $M^2 - LN = -q^2a^4\sin^2 v < 0 (v = 0$ ва $v = \pi$ нуқталар қаралмайди). Демак, сферада асимптотик чизиқлар йўқ. Балким сферадан бошқа шакл(жисм) бордир? Агар маълум алмаштириш ёрдамида, масалан, уни айланма эллипсоидга келтириладиган бўлса, унда узлуксиз $M^2 - LN$ функция ҳам маълум даражада ўзгаради ва ўз ишорасини сақлаб қолади. Шундай қилиб, асимптотик чизиқларга эга бўлмаган катта сиртлар синфи бор экан. Демак, ихтиёрий сиртнинг каноник реперини ясашда бу чизиқлар иш бермайди, яъни яроқсиз.

Хуллас $M^2 - LN > 0$ бўлган ҳолни қарайлик. Уни қисқача $\frac{dv}{du} = f_1(u,\ v) \pm f_2(u,\ v)$ деб ёзиш мумкин. Шундай қилиб битта номаълум $v = v(u)$ функцияга нисбатан иккита турли тенгламага эга бўламиз. Уларнинг ҳар бири битта ихтиёрий C ўзгармасга боғлиқ:

$v = \varphi(u, C)$. Буни ҳар доим $v_0 = \varphi(u_0, C)$ тенглик бажариладиган қилиб танлаб олиш мумкин. У ҳолда сиртнинг (v_0, u_0) нуқтаси орқали $\frac{dv}{du} = f_1(u, v) \pm f_2(u, v)$ тенглама билан аниқланучи иккита чизиқдан фақат биттаси, яъни $v = \varphi(u, C)$ чизиқ ўтади. Бошқача айтганда $M^2 - LN > 0$ шартда $\frac{dv}{du} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{N}$ тенгламанинг ечими сиртда ва берилган нуқта атрофида чизиқлар тўрини ҳосил қилади ва бу тўрлар мунтазам бўлади. Шунинг учун бу тенглама асимптотик тўрлар ҳосил қилади ва унинг тенгламаси $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$ кўринишда бўлади.

Энди диққатни геодезик чизиқларга қаратайлик. Бундай чизиқларнинг натурал тенгламаси $k_g = 0$ дан иборат. Унинг дифференциал тенгламасини ҳосил қилиш учун геодезик чизиқнинг хоссаларига мурожаат қиламиз: ёпишма текислик, шу текисликнинг нормалини ўзида сақлайди. Бу $\frac{d\bar{r}}{dt}$, $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ ва $\bar{e}_3$ векторларнинг компланарлигини англатади, яъни $\frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \cdot \bar{e}_3 = 0$. Бу аралаш кўпайтмани ҳисоблаш учун ярим каноник реперннинг биринчи иккита векторини $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ базис бўйича ёйишга тўғри келади. Юқоридаги деривацион формулалардан маълумки, $\bar{r}_u = a\bar{e}_1$ ва $\bar{r}_v = b\bar{e}_2$, унда $\frac{d\bar{r}}{dt}$ вектор учун $\frac{dr}{dt} = a\frac{du}{dt}\bar{e}_1 + b\frac{dv}{dt}\bar{e}_2$ тенглик ўринли. Агар $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = A_1\bar{e}_1 + A_2\bar{e}_2 + A_3\bar{e}_3$ деб белгиласак аралаш кўпайтма $\begin{vmatrix} a\frac{du}{dt} & b\frac{dv}{dt} & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ га ёки $aA_2\frac{du}{dt} - bA_1\frac{dv}{dt} = 0$ га тенг бўлади. Демак, A_3 коэффициентни ҳисоблаш шарт эмас. $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ нинг ўнг томонида учта иккинчи ҳосила бор, уни $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ базис орқали ифодалаймиз. Деривацион формулалар ёрдамида $\bar{r}$ нинг иккинчи ҳосилаларини топамиз:

$$\bar{r}_{uu} = \frac{\partial}{\partial u}\bar{r}_u = \frac{\partial}{\partial u}a\bar{e}_1 = a_u\bar{e}_1 + a(\alpha_{12}\bar{e}_2 + \alpha_{13}\bar{e}_3) = a_u\bar{e}_1 + a\alpha_{12}\bar{e}_2 + \dots$$
$$\bar{r}_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}\bar{r}_u = \frac{\partial}{\partial v}a\bar{e}_1 = a_v\bar{e}_1 + a(\beta_{12}\bar{e}_2 + \beta_{13}\bar{e}_3) = a_v\bar{e}_1 + a\beta_{12}\bar{e}_2 + \dots$$
$$\bar{r}_{vv} = \frac{\partial}{\partial v}\bar{r}_v = \frac{\partial}{\partial v}b\bar{e}_2 = b_v\bar{e}_2 + b(-\beta_{12}\bar{e}_2 + \beta_{13}\bar{e}_3) = -b\beta_{12}\bar{e}_1 + b_v\bar{e}_2 + \dots$$

энди $u = t$, $v = v(t) = v(u)$ амаштиришларни бажарамиз. У ҳолда $\frac{du}{dt} = 1$, $\frac{d^2u}{dt^2} = 0$ ва олдинги иккинчи тенглик билан таққослаймиз:

$$A_1 = a_u + 2a_v\frac{dv}{du} - b\beta_{12}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 \quad A_2 = b\frac{d^2v}{du^2} + a\alpha_{12} + 2b\beta_{12}\frac{dv}{du} + b_v\left(\frac{dv}{du}\right)^2.$$

Ниҳоят охирги тенглик $aA_2 - bA_1\frac{dv}{du} = 0$ ёки

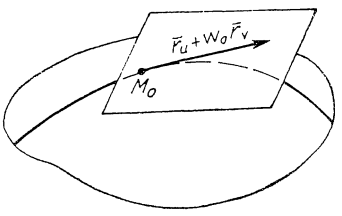
$$ab\frac{d^2v}{du^2} + ab_v\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2ab\beta_{12}\frac{dv}{du} + a^2\alpha_{12} - ba_u\frac{dv}{du} - 2ba_v\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - b^2\beta_{12}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0$$

кўринишни олади. Охирги тенгликни β_{12} учун қўллаймиз ва $ab \neq 0$ бўлганда геодезик чизиқнинг тенгламасига келамиз:

$\frac{d^2v}{du^2} - \left(\frac{dv}{du}\right)^3 \frac{bb_u}{a^2} + \left(\frac{dv}{du}\right)^2 (ab_v - 2ba_v) + + \frac{dv}{du}\left(2\frac{b_u}{a} - \frac{a_u}{a}\right) - \frac{aa_v}{b} = 0.$ Бу тенглама жуда кўп муҳим хулосаларни чиқаришга имкон беради.

Ассимптотик чизиқлар иккинчи тартибли, яъни тенгламада изланаётган $v = v(u)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосилалари қатнашади. Дифференциал тенгламалар умумий назариясида бундай тенгламанинг ечими иккита ихтиёрий ўзгармасга боғлиқ бўлиши исботланади, яъни унинг кўриниши қуйидагича: $v = \varphi(u, C_1, C_2)$.

Агар биз сиртдаги битта нуқтанинг координаталарини, яъни v_0 ва u_0 ни берсак берсак, унда C_1 ва C_2 лар қуйидаги муносабат билан боғланган бўлади: $v_0 = \varphi(u_0, C_1, C_2)$. Бундан сиртнинг фиксирланган нуқтасидан ўтувчи чексиз кўп геодезик чизиқлар тўпламига эга бўлиши келиб чиқади. Уни қандай жойлашишини билиш учун $v_0 = \varphi(u_0, C_1, C_2)$ ни дифференциаллаймиз: $\frac{dv}{du} = \varphi_u(u, C_1, C_2)$. Агар $\frac{dv}{du}$ функцияга $u = u_0$ координатага мос бирор w_0 қийматни қўядиган бўлсак, унда C_1 ва C_2 ни ҳисоблашда қуйидаги иккинчи муносабат ҳосил бўлади: $\left.\frac{dv}{du}\right|_{u=u_0,\ v=v_0} = w_0 = \varphi_u(u_0, C_1, C_2)$. Агар u_0, v_0, w_0 сонлар берилса, унда $v_0 = \varphi(u_0, C_1, C_2)$ ва $\left.\frac{dv}{du}\right|_{u=u_0,\ v=v_0} = w_0 = \varphi_u(u_0, C_1, C_2)$ дан C_1 ва C_2 лар топилади. Шунинг учун геодезик чизиқ тенгламаси берилган шартларда ягона ечимга эга бўлади. $v_0 = \varphi(u_0, C_1, C_2)$ шарт $M_0(u_0, v_0)$ нуқтани сиртда ётишини англатади. Унда $\left.\frac{dv}{du}\right|_{u=u_0,\ v=v_0} = w_0 = \varphi_u(u_0, C_1, C_2)$ шарт нимани англатади? Бу саволга жавоб бериш учун геодезик чизиқнинг $M_0(u_0, v_0)$ нуқтадан ўтувчи уринмасини, яъни қуйидагини топамиз: $\left.\frac{d\bar{r}}{du}\right|_{u=u_0,\ v=v_0} = \bar{r}_u(u_0 v_0) + \left.\frac{dv}{du}\right|_{u=u_0,\ v=v_0} \bar{r}_v(u_0, v_0)$. Маълумки, $\left.\frac{dv}{du}\right|_{v=v_0,\ v=v_0} = w_0$, унда юқоридаги шарт уринма йўналишининг берилишини англатади. Уринма текислик нуқтасига ҳар қандай йўналишни бериш мумкин ва бу нуқтадан ўтиб, бу йўналиш билан кесишувчи геодезик чизиқ топилади. Геодезик чизиқ ёрдамида биз бирорта ҳам сиртда инвариант йўналишни аниқлаш, яъни каноник репер ясашни иложи йўқ. Бу геодезик чизиқнинг ҳеч нарсага яроқсиз эканлигини англатмайди. Спортчилар айтганидек бизга яна бир марта синаш имкони қолди: $\varkappa_g = 0$ ни ечамиз. Бу $d\bar{r} \parallel d\bar{e}_3$ эканлиги билан характерланади. Уни қуйидагича топамиз: $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv = a\bar{e}_1 du + b\bar{e}_2 dv$, ва $d\bar{e}_3 = (-\alpha_{13}\bar{e}_1 - \alpha_{23}\bar{e}_2)du + (-\beta_{13}\bar{e}_1 - \beta_{23}\bar{e}_2)\,dv$. Параллелик шартидан $\frac{\alpha_{13}du + \beta_{13}dv}{adu} = \frac{\alpha_{23}du + \beta_{23}dv}{bdv}$, ёки $a\alpha_{23}(du)^2 + (a\beta_{23} - b\alpha_{13})\,dudv - b\beta_{13}(dv)^2 = 0$. Бу тенгламани асимптотик чизиқлар тенгламаси билан таққослаб эгрилик чизиқлари ҳам тўр ҳосил қилади деган хулосага келамиз ва қуйидагини ёзамиз: $\beta_{13} = \frac{b}{a}\alpha_{23}$. Олдинги тенгламани $\frac{dv}{du}$ га нисбатан квадрат тенгламани ечамиз:



$$(a\beta_{23} - b\alpha_{13})^2 + 4ab\alpha_{23}\frac{b}{a}\alpha_{23} = (a\beta_{23} - b\alpha_{13})^2 +$$

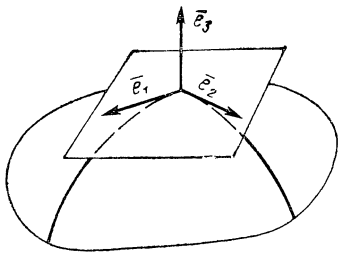
$4b^2\alpha_{23}^2 \geqslant 0$. Бу ифода фақат $\alpha_{23} = a\beta_{23} - b\alpha_{13} = \beta_{13} = 0$ бўлганда нолга тенг бўлади.

$a\alpha_{23}(du)^2 + (a\beta_{23} - b\alpha_{13})\,dudv - b\beta_{13}(dv)^2 = 0$ тенгламани каноатлантирувчи сиртлар синфига тегишли барча чизиқлар орасидан ортогонал тўрларни ажратиш мумкин. Ҳар қалай $\varkappa_g = 0$ чизиқнинг тўрлари, ҳар қандай сиртда мавжуд. Бу тўрлар оиласидан бирини $v = \text{const}$ чизиқ сифатида қабул қиламиз. У ҳолда юқоридаги тенглама $\alpha_{23} = 0$ да айниятга айланиши керак. Лекин унда $\beta_{13} = \frac{b}{a}\alpha_{23}$. га кўра $\beta_{13} = 0$ бўлади ва охирги тенглама($a\beta_{23} - b\alpha_{13} \neq 0$ га қисқартирилгандан кейин) қуйидаги кўринишни олади: $dudv = 0$. Демак, эгрилик чизиқларининг иккинчи оиласи учун $u = \text{const}$. Эгрилик чизиғини координата сифатида қабул қилиб каноник реперга эга бўламиз. Унинг деривацион формуласи $\alpha_{23} = \beta_{13} = 0$ кўринишда бўлади. Агар $\alpha_{13} = A$, $\beta_{23} = B$ деб олсак сирт каноник реперининг деривацион формулалари қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{aligned}
\bar{r}_u &= a\bar{e}_1, & \bar{r}_v &= b\bar{e}_2,\\
\bar{e}_{1u} &= -\frac{a_v}{b}\bar{e}_2 + A\bar{e}_3, & \bar{e}_{1v} &= \frac{b_u}{a}\bar{e}_2,\\
\bar{e}_{2u} &= \frac{a_v}{b}\bar{e}_1, & \bar{e}_{2v} &= -\frac{b_u}{a}\bar{e}_1\\
\bar{e}_{3u} &= -A\bar{e}_1, & e_{3v} &= -B\bar{e}_2.
\end{aligned}$$

Формулаларда ҳаммаси бўлиб тўртта a, b, A, B функциялар қатнашаяпти. Бу векторларнинг геометрик талқини қуйидагича: $\bar{e}_1$ ва $\bar{e}_2$ лар сирт нуқтасида эгрилик чизиғига уринади, бу ерда $\bar{e}_3$ нормал.

$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{e}_1$, $\frac{d\bar{e}_1}{ds} = k_g\bar{e}_2 + \nu\bar{e}_3$, $\frac{d\bar{e}_2}{ds} = -k_g\bar{e}_1 + \varkappa_g\bar{e}_3$, $\frac{d\bar{e}_3}{ds} = -\nu\bar{e}_1 - \varkappa_g\bar{e}_2$ га $\varkappa_g = 0$ ни қўйсак $v = \text{const}$ чизиқнинг каноник реперининг деривацион формулаларига эга бўламиз: $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{e}_1$, $\frac{d\bar{e}_1}{ds} = k_g\bar{e}_2 + \nu\bar{e}_3$, $\frac{d\bar{e}_2}{ds} = -k_g\bar{e}_1$, $\frac{d\bar{e}_3}{ds} = -\nu\bar{e}_1$. Ҳар иккаласини таққослаб $v = \text{const}$ эгрилик чизиғининг геодезик ва нормал эгрилиги бўлган $-\frac{a_v}{ab}$ ва $\frac{A}{a}$ миқдорга эга бўламиз. Худди шундай иккинчи $u = \text{const}$ эгрилик чизиғининг геодезик ва нормал эгрилиги бўлган $\frac{b_u}{ab}$ ва $\frac{B}{b}$ миқдорларга эга бўламиз. Демак, сиртнинг тўртта инвариантига эга бўлдик:



$$I_1 = -\frac{a_v}{ab} = k_g\,|_{v=\text{const}},\ I_2 = \frac{b_u}{ab} = k_g\,|_{u=\text{const}},\ I_3 = \frac{A}{a} = \nu\,|_{v=\text{const}},\ I_4 = \frac{B}{b} = \nu\,|_{u=\text{const}}.$$

Булар сирт инвариантларининг тўла системасини ташкил этади.

Бу инвариантлар эгри чизиқ инвариантларидан фарқ қилади, икки ўзгарувчининг ихтиёрий функцияси бўла олмайди, сирт каноник реперининг деривацион формулаларида учта тенглик қўшилган, ҳатто бу тўққизта бўлиши ҳам мумкин эди. Улардан бири 1828 йилда Гаусс томонидан олинган, қолган иккитаси италиян математиги Дельфино Кодацци(1824-1973) томонидан 1868 йилда топилган. Аслида булар 1856 йилда бошқа кўринишда ёзилган Анджело Майнарди(1800-1879) томонидан топилган, ундан ҳам эртароқ 1853 йилда Карл Михайлович Петерсон(1828-1881) ўзининг магистрлик

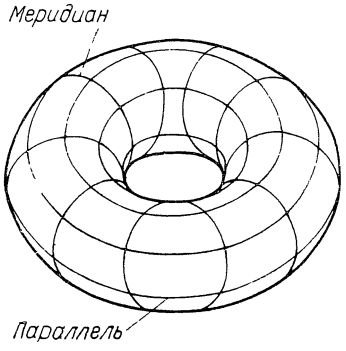
диссертациясида баён этган. Бу диссертациядан 1952 йилгача жаҳон математиклари бехабар эди. Уни диссертациясини шу йили рус математиги Иван Яковлевич Депман топган ва биринчи рус математика журналида “Математический сборник” журналида(бу журнал 1866 йилдан бошлаб ҳозиргача чоп этилмоқда) чоп этган.

Бу тенгламалар деривацион формулалар орқали қуйидагича топилган: $(\bar{e}_{3u})_v = -A_v\bar{e}_1 - A\bar{e}_{1v} = -A_v\bar{e}_1 - \frac{Ab_u}{a}\bar{e}_2.$ Иккинчи томондан $(\bar{e}_{3v})_u = -B_u\bar{e}_2 - B\bar{e}_{2u} = -B\frac{a_v}{b}\bar{e}_1 - B_u\bar{e}_2.$ Тенг векторларни координаталарини тенглаштириб $A_v = \frac{B}{b}a_v,\ B_u = \frac{A}{a}b_u$ (Петерсон – Кодаци тенгламаси) ни топамиз. Шундан сўнг алмаштириш бажариб $(\bar{e}_{1u})_v = -\left(\frac{a_v}{b}\right)_v\bar{e}_2 - \frac{a_v}{b}\left(-\frac{b_u}{a}\bar{e}_1 + B\bar{e}_3\right) + A_v\bar{e}_3 - AB\bar{e}_2$ ва $(\bar{e}_{1v})_u = \left(\frac{b_u}{a}\right)_u\bar{e}_2 + \frac{b_u}{a}\cdot\frac{a_v}{b}\bar{e}_1$ га эга бўламиз. $\bar{e}_3$ нинг олдидаги коэффициент нолга тенг, $\bar{e}_1$ нинг олдидаги коэффициентлар ўзаро тенг. Фақат $\bar{e}_2$ нинг олдидаги коэффициенларни таққослаб янги $-AB - \left(\frac{a_v}{b}\right)_v = \left(\frac{b_u}{a}\right)_u$ (Гаусс тенгламаси) муносабатга эга бўламиз. Биз бу формулаларни яна ҳам қулайроқ усулда ёзамиз:

$$A_v \cdot b = Ba_v, \qquad B_u \cdot a = Ab_u, \qquad \left(\frac{a_v}{b}\right)_v + \left(\frac{b_u}{a}\right)_u + AB = 0$$

ва сиртлар назариясининг асосий тенгламалари деб айтамиз. Монж ҳар бир ер бўлагини тўғри чизиқ бўйлаб силжишида, икки ўзгарувчига боғлиқ тўғри чизиқлар тўпламини ҳосил қилади де эътироф этади. Бу тўпламни $\bar{R} = \bar{r}(u, v) + \lambda\bar{l}(u, v)$ тўғри чизиқдаги $l(u, v)$ вектор функциянинг узлуксиз ва дифференциалланувчи бўлиши шарти билан $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ сирт бўлагининг ҳар бир нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқ сифатида қараш мумкин.

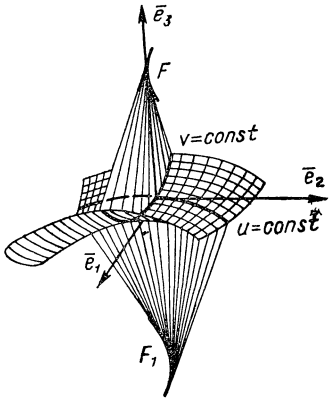
Тажрибалар шуни кўрсатадики, ёруғлик текислигидан чиқувчи нурлар ҳар доим унга перпендикуляр бўлади. Шундай қилиб нурлар боғлами текисликнинг нормали бўлади. Бу боғламдан чиқаётган ёруғлик нурларини синдирсак нима бўлади? Малюс ёруғлик текислигини ўз кучида қолишини асослади. Бу натижа Малюс – Дюпен теоремаси дейилади, бу теоремани буюк геометр Монжнинг шогирди Шарль Франсуа Дюпен(1784 – 1873) исботлади. Дюпен барча эгрилик чизиқлари айланадан иборат бўладиган, учунчи тартибли сиртни яратди ва уни текширди. Улардан энг соддаси қутқарувчи доиравий сиртдир (торни торс билан ва циклидларни циклоида билан чалкаштириб юбормаслик талаб этилади). Равшанки торни уни текислигида ётиб ва у билан кесишмайдиган айланани ўқ атрофидан айланишидан ҳосил қилиш мумкин, яъни айланма сирт бўлади. Маълумки торнинг нормали унинг меридиани орқали ўтади, айланадиган айлана мередианнинг ҳар бир ҳолатида маркази айланада, яъни торсда бўлган тўғри чизиқлар дастасини ҳосил қилади. Паралеллар бўйлаб нормаллар конус ҳосил қилади(яъни, айланувчи айлана траекторияси). Бу геометрик образнинг назарий ва амалий қийматини ўрганиш оғир. Кўп геометрлар Монждан бошлаб, бу сиртни узоқ ўргандилар.



Бу 150 йил давом этди. С.П. Фиников 1950 йилда чоп этилган “Теория конгуренций” номли асарида бу назарияни ривожлантирди. Бу сиртни сизиқлар оиласи(бир параметрли чизиқлар оиласи тўплами) тўплами сифатида тассавур қилиш мумкин. Сирт чизиғининг ҳар бир оиласига нормаллардан ҳосил бўлган сирт мос келади. Сиртда ётувчи чизиқнинг бирор нуқтасига ўтказилган сиртдаги нормаллар тўплами, фақат бу чизиқ эгрилик чизиғи бўлганда, берилган сирт торс бўлади. Бу тасдиқни исботлаш учун торсни бирор чизиғидаги уринмалардан(қайтувчи қирралар) иборатлигини кўрсатиш керак. Монж теоремасида нормаллар тўпламини муҳим ўрин тутишини исботлаш учун, бу қиррани топиш керак бўлади. Қиррадаги нуқтани F ҳарфи билан белгилаймиз. Бу нуқтанинг радиус вектори қуйидаги кўринишни олади: $\bar{R} = \bar{r} + \lambda \bar{e}_3$, бу ерда $\bar{e}_3$ нормалнинг вектори, $\bar{r}$ эса $v = \text{const}$ эгрилик чизиғида ҳаракат қилувчи нуқтанинг радиус вектори. Бунда F нуқта ётган чизиқ нормалга уриниши керак. Деривацион формулалар ёрдамида қуйидагини топамиз: $\frac{d\bar{R}}{ds} = \bar{e}_1 + \frac{d\lambda}{ds}\bar{e}_3 + \lambda\,(-\nu\bar{e}_1 + \varkappa_g \bar{e}_2)$. Шартга кўра $\bar{e}_1$ ва $\bar{e}_2$ лар олдидаги коэффициентлар нолга тенг, яъни $\varkappa_g = 0, \quad \lambda\nu = 1.$ Монжда $\varkappa_g = 0$ эгрилик чизиғининг нормаллари тўплами торс бўлиши исботланган: эгрилик чизиғи – айлана, торслар – конуслар ва тўғри чизиқлар дастаси. Бу ҳар қанай айланма сирт учун хосдир.

Умумий ҳолда фақат иккита эгрилик чизиқлари синфи мавжуд, унда нормаллар тўплами иккита торслар оиласига эга бўлади. Монж теоремасидан I_3 ва I_4 инвариантлар учун яна бирта характеристика ҳосил бўлади. Бунда F нуқта ётган чизиқ(яъни торсдаги қайтган қирра тенгламаси) қуйидаги кўринишни олади: $\bar{F} = \bar{r} + \frac{1}{\nu}\bar{e}_3 \,|_{v=\text{const}}$, ёки $\bar{F} = \bar{r} + \frac{1}{I_3}\bar{e}_3 \,|_{v=\text{const}}$,

Шунга ўхшаш $u = \text{const}$ эгрилик чизиғи бўйлаб $\bar{F}_1 = \bar{r} + \frac{1}{I_4}\bar{e}_3 \,|_{u=\text{const}}$ тенгламага эга бўламиз. $\bar{F} = \bar{r} + \frac{1}{I_3}\bar{e}_3 \,|_{v=\text{const}}$, ва $\bar{F}_1 = \bar{r} + \frac{1}{I_4}\bar{e}_3 \,|_{u=\text{const}}$ тенгламалар I_3 ва I_4 инвариантли геометрик характеристикаларни беради: улар торснинг қайтувчи қиррасига уринувчи нуқтасига мос келади ва абсцисса қиймати бўйича тескари нормалнинг нуқталаридан иборат. Бу эгриликларни Эйлер бош эгриликлар деб атади, барча нормал эгриликлар орасида берилган нуқтадан ўтувчи сиртнинг барча чизиқлари учун улар экстремал қийматларга эга(энг катта ва энг кичик).



ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. А.В. Погорелов. Геометрия, Москва “ Наука”, 1984 йил, 320 бет.
2. А. Нарманов. Дифференциал геометрия, Тошкент, 2012 йил, 310 бет.
3. Э.Э. Жумаев. Сут геометрических прит о творении. *“Murakkab muammolar bilan yuzlashayotgan zamonaviy ta’lim va psixologiya: Shaxsiy rivojlanishga ta’sir etuvchi sinergetik yondashuv muammolari” mavzusidagi xalqaro ilmiy-amaliy anjumani* 24.04.2025. https://doi.org/10.5281/zenodo.15275878. *550-554 бетлар.*

ПОСТАНОВКА ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В СМЕШАННОЙ ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ИЗ ЭТИХ ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

М.Мамажонов[1], С.М.Мамажонов[2], Дилзода У. Очилова[3]
[1]Доцент КГУ, [2]и.о. доцента КУ, [3]Докторант КГУ.
https://doi.org/10.5281/zenodo.20609700

Аннотация. *В данной работе ставится один класс краевых задач для параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка в смешанной пятиугольной области с тремя линиями изменения типа. Параболическая часть области является квадратом, а все три гиперболические части области – треугольниками. В зависимости от значений коэффициентов получается много случаев, основными являются 21 из них. Для этих случаев ставится ряд краевых задач.*

Ключевые слова: *краевые задачи, параболо-гиперболический тип, метод построения решения, метод продолжения, дифференциальные и интегральные уравнения.*

ВВЕДЕНИЕ.

Начиная с 70-80 годах двадцатого века начаты исследования по уравнениям третьего и высокого порядков параболо-гиперболического типа. Краевые задачи для таких уравнений поставлены и изучены впервые Т.Д. Джураевым [1] и его учениками [2, 3]. В этих работах в основном были изучены краевые задачи для уравнений третьего и четвертого порядков в области с одной характеристической линией изменения типа. Затем начали изучать ряд различных краевых задач для таких уравнений в различных областях с двумя и тремя линиями изменения типа (см. [4]-[6]).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

В этой работе ставится ряд краевых задач и исследуется одна из этих поставленных краевых задач для уравнения

$$\left(a_1\frac{\partial}{\partial x}+b_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0 \qquad (1)$$

в области G плоскости xOy, где $a_1,b_1,a_2,b_2\in R$, причем $a_i^2+b_i^2\neq 0\ (i=1,2)$; $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4\cup J_1\cup J_2\cup J_3$, G_1 – квадрат с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2, G_3, G_4 – треугольники с вершинами в точках $C(2,0)$, $E(1/2,-3/2)$, $D(-1,0)$; $A(0;0)$, $A_0(0,1)$, $D(-1,0)$ и $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $C(2,0)$ соответственно; J_1, J_2 и J_3 – открытые отрезки с вершинами в точках $C(2,0)$, $D(-1,0)$; $A(0;0)$, $A_0(0,1)$; $B(1;0)$, $B_0(1,1)$ соответственно, а $Lu=\begin{cases}u_{xx}-u_y, & (x,y)\in G_1,\\ u_{xx}-u_{yy}, & (x,y)\in G_j,\ j=2,3,4.\end{cases}$

Перед тем, как приступить к формулировке краевых задач для уравнения (1) в области G, запишем все краевые условия и условия склеивания на линиях изменения типа, которые пользуются при постановке краевых задач.

Краевые условия:

$$u\big|_{CE} = \psi_1(x),\ 1/2 \le x \le 2; \tag{2}$$

$$u\big|_{DP} = \psi_2(x),\ -1 \le x \le -1/2; \tag{3}$$

$$u\big|_{QE} = \psi_3(x),\ 0 \le x \le 1/2; \tag{4}$$

$$u\big|_{DE} = \psi_1(x),\ -1 \le x \le 1/2; \tag{5}$$

$$u\big|_{SE} = \psi_2(x),\ 1/2 \le x \le 1; \tag{6}$$

$$u\big|_{RC} = \psi_3(x),\ 3/2 \le x \le 2; \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{DE} = \psi_4(x),\ -1 \le x \le 1/2; \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{DE} = \psi_5(x),\ -1 \le x \le 1/2; \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{CE} = \psi_6(x),\ 1/2 \le x \le 2; \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{CE} = \psi_7(x),\ 1/2 \le x \le 2; \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{DA_0} = \psi_8(x),\ -1 \le x \le 0; \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{DA_0} = \psi_9(x),\ -1 \le x \le 0; \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{CB_0} = \psi_{10}(x),\ 1 \le x \le 2; \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{CB_0} = \psi_{11}(x),\ 1 \le x \le 2; \tag{15}$$

Условия склеивания:

$$u(x,+0) = u(x,-0) = T(x),\ -1 \le x \le 2; \tag{16}$$

$$u_y(x,+0) = u_y(x,-0) = N(x),\ -1 \le x \le 2; \tag{17}$$

$$u_{yy}(x,+0) = u_{yy}(x,-0) = M(x),\ x \in (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2); \tag{18}$$

$$u_{yyy}(x,+0) = u_{yyy}(x,-0) = \Theta(x),\ x \in (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2); \tag{19}$$

$$u(+0,y) = u(-0,y) = \tau_4(y),\ 0 \le y \le 1; \tag{20}$$

$$u_x(+0,y) = u_x(-0,y) = \nu_4(y),\ 0 \le y \le 1; \tag{21}$$

$$u_{xx}(+0,y) = u_{xx}(-0,y) = \mu_4(y),\ 0 < y < 1; \tag{22}$$

$$u_{xxx}(+0,y) = u_{xxx}(-0,y) = \theta_4(y),\ 0 < y < 1; \tag{23}$$

$$u(1+0,y) = u(1-0,y) = \tau_5(y),\ 0 \le y \le 1; \tag{24}$$

$$u_x(1+0,y) = u_x(1-0,y) = \nu_5(y),\ 0 \le y \le 1; \tag{25}$$

$$u_{xx}(1+0,y)=u_{xx}(1-0,y)=\mu_5(y),\ 0<y<1; \tag{26}$$

$$u_{xxx}(1+0,y)=u_{xxx}(1-0,y)=\theta_5(y),\ 0<y<1. \tag{27}$$

Здесь $\psi_j\left(j=\overline{1,11}\right)$ – заданные функции, n – внутренняя нормаль к прямой $x-y=2$ (CE) или $x+y=-1$ (DE) или $x-y=-1$ (DA_0) или $x+y=2$ (CB_0); CE, DP, QE, DE, SE и RC – отрезки с концами в точках C, E; D, P; Q, E; D, E; S, E и R, C соответственно, а $P(-1/2,-1/2)$, $Q(0,-1)$, $S(1,-1)$, $R(3/2,-1/2)$. Кроме того,

$$T(x)=\begin{cases}\tau_2(x), -1\le x\le 0,\\ \tau_1(x), 0\le x\le 1,\\ \tau_3(x), 1\le x\le 2,\end{cases}\quad N(x)=\begin{cases}\nu_2(x), -1\le x\le 0,\\ \nu_1(x), 0\le x\le 1,\\ \nu_3(x), 1\le x\le 2,\end{cases}\quad M(x)=\begin{cases}\mu_2(x), -1<x<0,\\ \mu_1(x), 0<x<1,\\ \mu_3(x), 1<x<2,\end{cases}$$

$$\Theta(x)=\begin{cases}\theta_2(x), -1<x<0,\\ \theta_1(x), 0<x<1,\\ \theta_3(x), 1<x<2,\end{cases}$$ а $\tau_i,\nu_i,\mu_i,\theta_i\left(i=\overline{1,5}\right)$, – неизвестные пока достаточно гладкие функции.

В зависимости от угловых коэффициентов $\gamma_i=b_i/a_i$ $(i=1,2)$ операторов $a_i\dfrac{\partial}{\partial x}+b_i\dfrac{\partial}{\partial y}$ получаются различные случаи. 21 из них являются основными.

Поэтому для уравнения (1) в области G ставится следующая задача:

Задача *M*. Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy} и u_{yy} – непрерывны вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$; 3) удовлетворяет одну из групп краевых условий и условиям склеивания на линиях изменения типа, которые указаны в следующей таблице:

№ с.	Значения γ_i	Краевые условия	Условия скл.
1°.	$\gamma_1=0,\gamma_2=0$ $\left(a_i=1,b_i=0,i=\overline{1,2}\right)$	{(2), (3), (4), (8), (9), (12), (13)} и всего 72 таких групп условий.	(16), (17), (20)-(27)
2°.	$\gamma_1=\infty$, $\gamma_2=\infty$ $\left(a_i=0,b_i=1,i=\overline{1,2}\right)$	{(2), (3), (4), (8), (9), (10), (11)} или {(5) -(11)}.	(16)-(21), (24),(25)
3°	$\gamma_1=0$, $\gamma_2=\infty$ $(a_1=1,$ $b_2=0;a_2=0,b_2=1)$	{(2), (3), (4), (8), (9), (10), (12)} и всего 32 таких групп условий.	(16)-(18), (20)-(22), (24)-(26)
4° a)	$\gamma_1=0$, $0<\gamma_2<1$	{(2), (3), (4), (8), (9), (12), (13)} и всего 50 таких групп условий.	(16)-(18), (20)-(27)
4° b)	$\gamma_1=0$, $\gamma_2=1$	{(5), (6), (7), (8), (9), (12)} и всего 20 таких групп условий.	(16)-(18), (20)-(27)
5°.	$\gamma_1=0$, $1<\gamma_2<+\infty$	{(2), (3), (4), (8), (9), (10), (12)} и всего	(16)-(18),

		32 таких групп условий.	(20)-(27)
6° a)	$\gamma_1 = 0,\ -1 < \gamma_2 < 0$	{(2), (3), (4), (10), (11), (14), (15} и всего 50 таких групп условий.	(16)-(18), (20)-(27)
6° b)	$\gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = -1$	{(2), (3), (4), (10), (11), (12)} и всего 20 таких групп условий.	(16)-(18), (20)-(27)
7°.	$\gamma_1 = 0,\ -\infty < \gamma_2 < -1$	{(2), (3), (4), (8), (10), (11), (12)} и всего 32 таких групп условий.	(16)-(18), (20)-(27)
8° a)	$\gamma_1 = \infty,\ 0 < \gamma_2 < 1$	{(2), (3), (4), (8), (9), (10), (12)} и всего 8 таких групп условий.	(16)-(22), (24)-(26)
8° b)	$\gamma_1 = \infty,\ \gamma_2 = 1$	{(5)-(10)} и {(5)-(9), (11)}.	(16)-(22), (24)-(26)
9°.	$\gamma_1 = \infty,\ 1 < \gamma_2 < +\infty$	{(2), (3), (4), (8)-(11)} и (5)-(11).	(16)-(22), (24)-(26)
10° a	$\gamma_1 = \infty,\ -1 < \gamma_2 < 0$	{(2), (3), (4), (8), (10), (11), (15)} и всего 8 таких групп условий.	(16)-(22), (24)-(26)
10°b	$\gamma_1 = \infty,\ \gamma_2 = -1$	{(2), (3), (4), (8), (10), (11)} и {(2), (3), (4), (9), (10), (11)}.	(16)-(22), (24)-(26)
11°.	$\gamma_1 = \infty,\ -\infty < \gamma_2 < -1$	{(2), (3), (4), (8)-(11)} и {(5)-(11)}.	(16)-(22), (24)-(26)
12° a	$0 < \gamma_1 < 1,\ 0 < \gamma_2 < 1$	{(2), (3), (4), (8), (9), (12), (13)} и {(5)-(9), (12), (13)}	(16)-(27)
12°b	$0 < \gamma_1 < 1,\ \gamma_2 = 1$	{(5)-(9), (12)} и {(5)-(9), (13)}	(16)-(27)
12° c	$\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = 1$	{(5)-(9)}	(16)-(27)
13° a	$0 < \gamma_1 < 1,\ 1 < \gamma_2 < +\infty$	{(2), (3), (4), (8), (9), (12)} и всего 8 таких групп условий.	(16)-(27)
13°b	$\gamma_1 = 1,\ 1 < \gamma_2 < +\infty$	{(5)-(10)} и {(5)-(9), (11)}.	(16)-(27)
14° a	$0 < \gamma_1 < 1,\ -1 < \gamma_2 < 0$	{(2)-(4), (8), (10), (12), (14)} и всего 32 таких групп условий.	(16)-(27)
14°b	$0 < \gamma_1 < 1,\ \gamma_2 = -1$	{(2)-(4), (8), (10), (12)} и всего 8 таких групп условий.	(16)-(27)
14° c	$\gamma_1 = 1,\ -1 < \gamma_2 < 0$	{(5)-(8), (10), (14)} и всего 8 таких групп условий.	(16)-(27)
14°d	$\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = -1$	{(2), (3), (4), (8), (10)} и всего 8 таких групп условий.	(16)-(18), (20)-(27)
15° a	$0 < \gamma_1 < 1,$ $-\infty < \gamma_2 < -1$	{(2), (3), (4), (8), (9), (10)} и всего 4 таких групп условий.	(16)-(27)
15°b	$\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 \in (-\infty, -1)$	{(5)-(10)} и {(5)-(9), (11)}.	(16)-(27)
16°	$\gamma_1, \gamma_2 \in (1, +\infty)$	{(2), (3), (4), (8)-(11)} и {(5)-(11)}	(16)-(27)
17° a	$\gamma_1 \in (1, +\infty), \gamma_2 (-1, 0)$	{(2), (3), (4), (8), (10), (11), (14)} и всего 8 таких групп условий.	(16)-(27)
17°b	$\gamma_1 \in (1, +\infty), \gamma_2 = -1$	{(2), (3), (4), (8), (10), (11)} и {(2), (3), (4), (9), (10), (11)}.	(16)-(27)

18°	$\gamma_1 \in (1,+\infty), \gamma_2 (-\infty,-1)$	{(2), (3), (4), (8)-(11)} и {(5)-(11)}.	(16)-(27)
19° a	$\gamma_1, \gamma_2 \in (-1,0)$	{(2)-(4), (10), (11), (14), (15)} и {(5)-(7), (10), (11), (14), (15)}	(16)-(27)
19°b	$-1 < \gamma_1 < 0$, $\gamma_2 = -1$	{(2)-(4), (10), (11), (14)} и {(2)-(4), (10), (11), (15)}	(16)-(27)
19° c	$\gamma_1 = -1$, $\gamma_2 = -1$	{(2)-(4), (10), (11)}	(16)-(27)
20° a	$-1 < \gamma_1 < 0$, $-\infty < \gamma_2 < -1$	{(2)-(4), (8), (10), (11), (14)} и всего 8 таких групп условий.	(16)-(27)
20°b	$\gamma_1 = -1$, $-\infty < \gamma_2 < -1$	{(2)-(4), (8), (10), (11)} и {(2)-(4), (9)-(11)}.	(16)-(27)
21°	$\gamma_1, \gamma_2 \in (-\infty,-1)$	{(2)-(4), (8)-(11)} и {(5)-(11)}	(16)-(27)

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ *M* В СЛУЧАЕ 1° С ГРУППОЙ УСЛОВИЙ {(2), (3), (4), (8), (9), (12), (13)}.

В настоящей работе мы будем исследовать задачу M лишь в 1°-случае с группой условий {(2), (3), (4), (8), (9), (12), (13)}.

Теорема. Если $\psi_1 \in C^4[1/2,2]$, $\psi_2 \in C^4[-1,-1/2]$, $\psi_3 \in C^4[0,1/2]$, $\psi_4 \in C^3[-1,1/2]$, $\psi_5 \in C^2[-1,1/2]$, $\psi_8 \in C^3[-1,0]$, $\psi_9 \in C^2[-1,0]$, причем выполняется условие согласования $\psi_3(1/2) = \psi_1(1/2)$, $\tau_1(0) = \tau_2(0) = \tau_4(0)$, $\tau_1(1) = \tau_3(1) = \tau_5(0)$, $\nu_1(0) = \nu_2(0) = \tau_4'(0)$, $\nu_1(1) = \nu_3(1) = \tau_5'(0)$, $\tau_1'(0) = \nu_4(0)$, $\tau_1'(1) = \nu_5(0)$, то задача M в 1°-случае с группой условий {(2), (3), (4), (8), (9), (12), (13)} допускает единственное решение.

Доказательство. Теорему докажем методом построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_{11}(y)x + \omega_{12}(y),\ (x,y) \in G_1, \tag{28}$$

$$u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_{i1}(y)x + \omega_{i2}(y),\ (x,y) \in G_i,\ i = 2,3,4, \tag{29}$$

где введено обозначение $u(x,y) = u_i(x,y),\ (x,y) \in G_i,\ i = \overline{1,4}$, причем $\omega_{i1}(y)$, $\omega_{i2}(y)$ $(i = \overline{1,4})$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции.

Сначала задачу M рассмотрим в области G_2. Записывая решение уравнения (29) $(i = 2)$, удовлетворяющее условиям (16), (17) и подставляя это решение в условия (8) и (9), после некоторых вычислений и преобразований, находим функции $\omega_{21}(y)$ и $\omega_{22}(y)$.

Подставляя записанное решение в условие (2), (3), (4) и дифференцируя полученное уравнение после некоторых выкладок, имеем три соотношения между неизвестными функциями $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$; $\tau_2(x)$, $\nu_2(x)$ и $\tau_3(x)$, $\nu_3(x)$.

Теперь переходя в уравнении (28) к пределу при $y \to 0$, в силу (18), (19) при $0 \le x \le 1$ получим второе соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$.

Исключая из этих двух соотношений между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$ функцию $\nu_1(x)$ и интегрируя полученное уравнение от 0 до x, получим уравнение первого порядка относительно $\tau_1(x)$, в котором участвуют три неизвестные постоянные.

Решая это уравнение при известных трех условий, находим функцию $\tau_1(x)$.

Таким образом, мы определили и функции $\nu_1(x)$, $u_2(x,y)$.

Далее, применяя метод продолжения, в областях G_3 и G_4 получим две соотношения между $\tau_4(y)$, $\nu_4(x)$ и $\tau_5(y)$, $\nu_5(y)$.

Теперь переходим в область G_1. Записываем решение уравнения (28), удовлетворяющего условиям (16) при $0 \le x \le 1$, (20) и (24), затем дифференцируя это решение по x и полагая в полученном равенстве $x \to 0$ и $x \to 1$ в силу (42) и (43), получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Решая эту систему, находим функции $\tau_4'''(y)$ и $\tau_5(y)$, тем самым и функции, $\tau_4''(y)$, $\tau_4'(y)$, $\tau_4(y)$, $\tau_5'(y)$, $\nu_4(y)$, $\nu_5(y)$, $\omega_{11}(y)$, $\omega_{12}(y)$, $\omega_{41}(y)$, $\omega_{42}(y)$. Тогда будут известными и функции $u_3(x,y)$, $u_4(x,y)$ и $u_1(x,y)$. Итак, мы нашли решение поставленной задачи M в случае 1° с группой условий {(2), (3), (4), (8), (9), (12), (13)} единственным образом.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент. Фан. 1979. 240 с.
2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, Фан, 1986, 220 с.
3. Джураев Т.Д., Мамажанов М. Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа. Дифференц. уравнения, 1986, т.22, №1, с.25-31.
4. M.Mamajonov, Q.Rakhimov, Kh.Shermatova. On the formulation and investigation of a boundary value problem for a third-order equation of a parabolic-hyperbolic type. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series, No. 2(114), 2024, pp. 135–146.
5. Apakov Yu.P., Mamajonov S.M. Solvability of a boundary value problem for a fourth order equation of parabolic-hyperbolic type in a pentagonal domain. Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2021, 15 (4), pp. 586-596.
6. Mamajonov M. On a boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation of the fourth order. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, No. 1(117), 2025, pp. 118–132.

ПОСТАНОВКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ШЕСТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ.

М.Мамажонов[1], Х.М. Шерматова[2], Дилнавоз У. Очилова[3]
[1]Доцент КГУ, [2]Доцент ФерГУ, [3]Докторант КГУ.
https://doi.org/10.5281/zenodo.20609723

Аннотация. *В данном сообщении в зависимости от значений коэффициентов оператора первого порядка ставится ряд краевых задач для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в шестиугольной области. Однозначная разрешимость поставленной задачи доказывается с помощью методом продолжения, а также методами интегральных и дифференциальных уравнений.*

Ключевые слова: *Дифференциальные и интегральные уравнения, метод продолжения, краевая задача, параболо-гиперболический тип, однозначная разрешимость.*

Начиная с 80 годов XX века исследование краевых задач для уравнений третьего, четвертого и высокого порядков параболо-гиперболического типа стало интенсивно развиваться. Краевые задачи для таких уравнений были изучены в основном в работах [1], [2] и др. А в начале XXI века началось исследование ряда краевых задач для таких уравнений в различных областях с двумя и тремя линиями изменения типа (см., например, [3], [4], [5] и другие).

В настоящем сообщении ставится один класс краевых задач для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0 \qquad (1)$$

в шестиугольной области G плоскости xOy, где $Lu=\begin{cases}u_{1xx}-u_{1y}, & (x,y)\in G_1,\\ u_{ixx}-u_{iyy}, & (x,y)\in G_i \quad (i=2,3),\end{cases}$ $a,b,c\in R$, $a^2+b^2\neq 0$, $u(x,y)=u_i(x,y),(x,y)\in G_i$ $(i=1,2,3)$, а $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup$ $\cup J_1\cup J_2\cup J_3$, то есть G_1- прямоугольник с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2- четырёхугольник с вершинами в точках $B(1,0)$, $D(-1,0)$, $D_0(-1,-1)$, $C(0,-1)$; G_3- трёхугольник с вершинами в точках $A(0,0)$, $D(-1,0)$, $A_0(0,1)$; J_1- открытый отрезок с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$; J_2- открытый отрезок с вершинами в точках $A(0,0)$, $D(-1,0)$; J_3- открытый отрезок с вершинами в точках $A(0,0)$, $A_0(0,1)$.

Перед тем, как приступить к постановке краевых задач, запишем все краевые условия и условия склеивания на линиях изменения типа, из которых будем пользоваться при постановке краевых задач:

Краевые условия:

$$u(1,y)=\varphi_1(y),\quad 0\le y\le 1, \tag{2}$$

$$u(-1,y)=\varphi_2(y),\ -1\le y\le 0, \tag{3}$$

$$u_x(1,y)=\varphi_3(y),\ 0\le y\le 1, \tag{4}$$

$$u_x(-1,y)=\varphi_4(y),\ -1\le y\le 0, \tag{5}$$

$$u(x,-1)=f_1(x),\ -1\le x\le 0, \tag{6}$$

$$u|_{BC}=\psi_1(x),\ 0\le x\le 1, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_2(x),\ 0\le x\le 1, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{A_0D}=\psi_3(x),\ -1\le x\le 0, \tag{9}$$

Условия склеивания:

$$u(x,-0)=u(x,+0)=T(x),\ -1\le x\le 1, \tag{10}$$

$$u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=N(x),\ -1\le x\le 1, \tag{11}$$

$$u_{yy}(x,-0)=u_{yy}(x,+0)=M(x),\ -1<x<1, \tag{12}$$

$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau_3(y),\ 0\le y\le 1, \tag{13}$$

$$u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu_3(y),\ 0\le y\le 1, \tag{14}$$

$$u_{xx}(-0,y)=u_{xx}(+0,y)=\mu_3(y),\ 0<y<1. \tag{15}$$

Здесь $\varphi_i\ (i=\overline{1,4})$, $\psi_j\ (j=\overline{1,3})$, f_1 – заданные достаточно гладкие функции,

$$T(x)=\begin{cases}\tau_1(x),\ 0\le x\le 1,\\ \tau_2(x),\ -1\le x\le 0;\end{cases}\quad N(x)=\begin{cases}\nu_1(x),\ 0\le x\le 1,\\ \nu_2(x),\ -1\le x\le 0;\end{cases}\quad M(x)=\begin{cases}\mu_1(x),\ 0<x<1,\\ \mu_2(x),\ -1<x<0,\end{cases}$$

$\tau_i,\nu_i,\mu_i\ (i=\overline{1,3})$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, n – внутренняя нормаль к прямой $x-y=1$ или $x-y=-1$.

В зависимости от значений коэффициентов a и b, то есть от значений углового коэффициента $\gamma=\dfrac{b}{a}$ оператора первого порядка уравнения (1), получаются различные случаи. Учитывая это для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача-1. Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x и u_y – непрерывны вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$; 3) удовлетворяет краевым условиям и условиям склеивания на линиях изменения типа, которые указаны в следующей таблице:

№	Значения γ	Краевые условия	Условия склеивания
1.	$\gamma=0$ $(a\ne 0, b=0)$	{(2),(3),(5),(7),(8),(9)}	(10), (11), (13)-(15)
2.	$\gamma=\infty$ $(a=0, b\ne 0)$	{(2),(3),(6),(7),(8)}	(10)-(14)

3.	$0<\gamma<1$	{(2),(3),(5),(6),(7),(9)}	(10)-(15)
4.	$\gamma=1$	{(2),(3),(5),(6),(7)}	(10)-(15)
5.	$1<\gamma<+\infty$	{(2),(3),(5),(6),(7),(8)}	(10)-(15)
6.	$-\infty<\gamma<0$	{(2),(3),(4),(6),(7),(8)}	(10)-(15)

Здесь мы укажем решение поставленной задачи в случае 1. В этом случае уравнение (1) имеет вид

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+c\right)(Lu)=0. \qquad (1')$$

Докажем следующую теорему:

Теорема. Если $\varphi_1\in C^3[0,1]$, $\varphi_2\in C^3[-1,0]$, $\psi_1\in C^3[0,1]$, $\psi_2\in C^2[0,1]$, $\psi_3\in C^2[-1,0]$, причем выполняются условия согласования $\tau_1(0)=\tau_2(0)$, $\tau_1'(0)=\tau_2'(0)$, $\tau_1(1)=\psi_1(1)=\varphi_1(0)$, то задача-1 допускает единственное решение в случае 1.

Доказательство. Уравнение (1') перепишем в виде

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_1(y)e^{-\frac{c}{a}x},\ (x,y)\in G_1, \qquad (16)$$

$$u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_i(y)e^{-\frac{c}{a}x},\ (x,y)\in G_i\ \ (i=2,3), \qquad (17)$$

где введено обозначение $u(x,y)=u_i(x,y),\ (x,y)\in G_i\ \left(i=\overline{1,3}\right)$, причем $\omega_i(y)\left(i=\overline{1,3}\right)$ – неизвестные функции.

Исследование проведем сначала в области G_2. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_{2xx}-u_{2yy}=\omega_2(y)e^{-\frac{c}{a}x},\ (x,y)\in G_2, \\ u_2(x,0)=T(x),\ u_{2y}(x,0)=N(x),-2\le x\le 1, \\ u_2|_{BC}=\psi_1(x),\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_2(x),\ 0\le x\le 1, \\ u_2(-1,y)=\varphi_2(y),\ u_{2x}(-1,y)=\varphi_4(y),\ -1\le y\le 0. \end{cases}$$

где $T(x)$ и $N(x)$ определяются следующим образом. При $0\le x\le 1$ они имеют вид: $T_1(x)=\tau_1(x)$, $N_1(x)=\nu_1(x)$, при $-1\le x\le 0$ – $T(x)=\tau_2(x)$, $N(x)=\nu_2(x)$, а при $-2\le x\le -1$ они пока неизвестны.

Решение этой задачи, удовлетворяющее всем условиям кроме условий $u_{2x}(-1,y)=\varphi_4(y)$, $u_2|_{BC}=\psi_1(x)$ и $\left.\dfrac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_2(x)$, будем искать в виде

$$u_2(x,y)=u_{21}(x,y)+u_{22}(x,y), \qquad (18)$$

где $u_{21}(x,y)-$ решение задачи

$$\begin{cases} u_{21xx}-u_{21yy}=0, \\ u_{21}(x,0)=T_1(x),\ u_{21y}(x,0)=0,-2\le x\le 1, \\ u_{21}(-1,y)=\varphi_2(y),\ -1\le y\le 0, \end{cases} \qquad (19)$$

$u_{22}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{22xx} - u_{22yy} = \omega_2(y)e^{-cx}, \\ u_{22}(x,0) = 0,\ u_{22y}(x,0) = N_1(x), -2 \le x \le 1, \\ u_{22}(-1,y) = 0,\ -1 \le y \le 0. \end{cases} \tag{20}$$

Методом продолжения находим решения задач (19) и (20). Они имеют вид

$$u_{21}(x,y) = \frac{1}{2}\left[T(x+y) + T(x-y)\right], \tag{21}$$

$$u_{22}(x,y) = \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} N(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^y \omega_2(\eta)\,d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} e^{-\frac{c}{a}\xi}\,d\xi, \tag{22}$$

где

$$T(x) = \begin{cases} \tau_1(x),\ 0 \le x \le 1, \\ \tau_2(x),\ -1 \le x \le 0, \\ 2\varphi_2(x+1) - \tau_2(-2-x),\ -2 \le x \le -1, \end{cases}$$

$$N(x) = \begin{cases} \nu_1(x),\ 0 \le x \le 1, \\ \nu_2(x),\ -1 \le x \le 0, \\ -\nu_2(-2-x) + \int_0^{x+1} \omega_2(\eta)e^{-\frac{c}{a}(x-\eta)}\,d\eta + \int_0^{x+1} \omega_2(\eta)e^{-\frac{c}{a}(\eta-2-x)}\,d\eta,\ -2 \le x \le -1. \end{cases}$$

Подставляя (21) и (22) в (18), получим

$$u_2(x,y) = \frac{1}{2}\left[T(x+y) + T(x-y)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} N(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^y \omega_2(\eta)\,d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} e^{-\frac{c}{a}\xi}\,d\xi, \tag{23}$$

а подставляя (23) в условие $\left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_2(x)$, находим

$$\omega_2(y) = -\sqrt{2}\psi_2'(y+1)e^{\frac{c}{a}(y+1)},\ -1 \le y \le 0.$$

Далее, подставляя (23) в условие $u_2|_{BC} = \psi_1(x)$, приходим к соотношению

$$T'(x) + N(x) = \alpha_1(x),\ -1 \le x \le 1, \tag{24}$$

где $\alpha_1(x)$ – известная функция.

При $0 \le x \le 1$ уравнение (24) имеет вид

$$\tau_1'(x) + \nu_1(x) = \alpha_1(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{25}$$

а при $-1 \le x \le 0$ –

$$\tau_2'(x) + \nu_2(x) = \alpha_1(x),\ -1 \le x \le 0. \tag{26}$$

Теперь подставляя (23) в условие $u_{2x}(-1,y) = \varphi_4(y)$, имеем соотношение

$$\tau_2'(x) - \nu_2(x) = \delta_1(x),\ -1 \le x \le 0, \tag{27}$$

где $\delta_1(x)$ – известная функция.

Из (25) и (26) находим

$$\tau_2'(x)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(x)+\delta_1(x)\right],\ \nu_2(x)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(x)-\delta_1(x)\right]. \qquad (28)$$

Интегрируя первое из равенств (28), получим

$$\tau_2(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\varphi_2(0). \qquad (29)$$

Далее, переходя в уравнение (16) к пределу при $y\to 0$ в силу условий (10) и (11) при $0\le x\le 1$, получим соотношение

$$\tau_1''(x)-\nu_1(x)=\omega_1(0)e^{-\frac{c}{a}x},\ 0\le x\le 1.$$

Слагая это соотношение и (25), получим уравнение

$$\tau_1''(x)+\tau_1'(x)=\alpha_1(x)+\omega_1(0)e^{-\frac{c}{a}x},\ 0\le x\le 1.$$

Интегрируя это уравнение от 0 до x, приходим к уравнению

$$\tau_1'(x)+\tau_1(x)=\alpha_2(x)+\omega_1(0)h_1(x)+k_1,\ 0\le x\le 1,$$

где $\alpha_2(x)$, $h_1(x)-$ известные функция, а $\omega_1(0)$, k_1 – неизвестные пока постоянные числа.

Решая последнее уравнение при условиях $\tau_1'(0)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(0)+\delta_1(0)\right]$, $\tau_1(0)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\varphi_2(0)$, $\tau_1(1)=\varphi_1(0)$, находим

$$\tau_1(x)=\int_0^x e^{t-x}\alpha_2(t)\,dt+\omega_1(0)\int_0^x e^{t-x}h_1(t)\,dt+k_1\left(1-e^{-x}\right)+k_2e^{-x},$$

где k_1, k_2 и $\omega_1(0)$ – известные постоянные числа.

Теперь переходим в область G_3. Сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_{3xx}-u_{3yy}=\omega_3(y)e^{-\frac{c}{a}x},\ (x,y)\in G_3,\\ u_3(x,0)=T_2(x),\ u_{3y}(x,0)=N_2(x),-1\le x\le 1,\\ \left.\dfrac{\partial u_3}{\partial n}\right|_{A_0D}=\psi_3(x),\ -1\le x\le 0,\\ u_3(0,y)=\tau_3(y),\ u_{3x}(0,y)=\nu_3(y),\ 0\le y\le 1, \end{cases}$$

где $T_2(x)$, $N_2(x)$ определяются следующим образом. При $-1\le x\le 0$ они имеют вид: $T_2(x)=\tau_2(x)$, $N_2(x)=\nu_2(x)$, а при $0\le x\le 1$ они пока неизвестны.

Решение этой задачи, удовлетворяющее всем условиям кроме условий $u_{3x}(0,y)=\nu_3(y)$ $\left.\dfrac{\partial u_3}{\partial n}\right|_{A_0D}=\psi_3(x)$, будем искать в виде

$$u_3(x,y)=u_{31}(x,y)+u_{32}(x,y), \qquad (30)$$

где $u_{31}(x,y)-$ решение задачи

$$\begin{cases} u_{31xx} - u_{31yy} = 0, \\ u_{31}(x,0) = T_2(x),\ u_{31y}(x,0) = 0, -1 \le x \le 1, \\ u_{31}(0,y) = \tau_3(y),\ 0 \le y \le 1, \end{cases} \tag{31}$$

$u_{32}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{32xx} - u_{32yy} = \omega_3(y) e^{-\frac{c}{a}x}, \\ u_{32}(x,0) = 0,\ u_{32y}(x,0) = N_2(x), -1 \le x \le 1, \\ u_{32}(0,y) = 0,\ 0 \le y \le 1. \end{cases} \tag{32}$$

Методом продолжения находим решение задач (31) и (32). Они имеют вид

$$u_{31}(x,y) = \frac{1}{2}\left[T_2(x+y) + T_2(x-y)\right], \tag{33}$$

$$u_{32}(x,y) = \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} N_2(t)\,dt - -\frac{1}{2}\int_0^y \omega_3(\eta)\,d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} e^{-\frac{c}{a}\xi}\,d\xi, \tag{34}$$

где

$$T_2(x) = \begin{cases} \tau_2(x), -1 \le x \le 0, \\ 2\tau_3(x) - \tau_2(-x), 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

$$N_2(x) = \begin{cases} \nu_2(x), -1 \le x \le 0, \\ -\nu_2(-x) + \int_0^x \omega_3(\eta)\left[e^{-\frac{c}{a}(x-\eta)} + e^{-\frac{c}{a}(\eta-x)}\right]d\eta, 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Подставляя (33) и (34) в (30), получим

$$u_3(x,y) = \frac{1}{2}\left[T_2(x+y) + T_2(x-y)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} N_2(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^y \omega_3(\eta)\,d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} e^{-\frac{c}{a}\xi}\,d\xi. \tag{35}$$

Далее, подставляя (35) в условие $u_3\big|_{A_0D} = \psi_3(x)$, находим

$$\omega_3(y) = \sqrt{2}\psi_3'(y-1)e^{\frac{c}{a}(y-1)},\ 0 \le y \le 1.$$

Дифференцируя (35) по x и полагая в полученном равенстве $x = 0$, в силу условий (13), (14) и равенства

$$\tau_3'(y) = \int_0^y \tau_3''(\eta)\,d\eta + \nu_1(0), \tag{36}$$

получим

$$\nu_3(y) = \int_0^y \tau_3''(\eta)\,d\eta + \beta_1(y),\ 0 \le y \le 1, \tag{37}$$

где $\beta_1(y) = \nu_1(0) + \tau_2'(-y) - \nu_2(-y) + \int_0^y \omega_3(\eta)e^{-\frac{c}{a}(\eta-y)}\,d\eta$.

Теперь переходим в область G_1. Переходя в уравнениях (16) и (17) $(i=3)$ к пределу при $x \to 0$, затем исключая из полученных уравнениях функцию $\mu_3(y)$, находим

$$\omega_1(y) = \tau_3''(y) - \tau_3'(y) + \omega_3(y). \tag{38}$$

Записывая решение уравнения (18), удовлетворяющего условиям (2), (10) $(0 \le x \le 1)$, (13) и дифференцируя это решение по x, затем полагая в полученном равенстве $x = 0$ в силу (37) и равенства (36) после длинных вычислений и преобразований, приходим к интегральному уравнению Абеля относительно $\tau_3''(y)$:

$$\int_0^y \frac{\tau_3''(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\,d\eta + \int_0^y H(y,\eta)\,\tau_3''(\eta)\,d\eta = G(y),$$

где $H(y,\eta)$ и $G(y)$ – известные функции.

Применяя обращение Абеля к этому уравнению, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\tau_3''(y)$:

$$\tau_3''(y) + \int_0^y K(y,\eta)\,\tau_3''(\eta)\,d\eta = g(y),$$

где $K(y,\eta)$ и $g(y)$ – известные функции, причем ядро $K(y,\eta)$ имеет слабую особенность $(1/2)$, а $g(y)$ – непрерывная функция.

Решая последнее уравнение, находим функцию $\tau_3''(y)$, тем самым и решение поставленной задачи.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Джураев Т.Д., Мамажанов М. Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа. Дифференц. уравнения, 1986, т.22, №1, с.25-31.
2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, Фан, 1986, 220 с.
3. Mamajonov M. On a boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation of the fourth order. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, No. 1(117), 2025, pp. 118–132.
4. Mamajanov M., Rakhimov Q., Shermatova Kh. On the formulation and investigation of a boundary value problem for a third-order equation of a parabolic-hyperbolic type. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series, No. 2(114), 2024, pp. 135–146.
5. Apakov Yu.P., Mamajonov S.M. Solvability of a Boundary Value Problem for a Fourth Order Equation of Parabolic-Hyperbolic Type in a Pentagonal Domain. Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2021, 15 (4), pp. 586-596.

KASR HOSILALI UCHINCHI TARTIBLI TENGLAMA UCHUN CHORAK TEKISLIKDAGI CHEGARAVIY MASALALAR

Matmuratov Muhiddin Nurullajonovich[1], Zunnunov Raximjon Temirbekovich[2]
[1]Aniq va ijtimoiy fanlar universiteti, 1-kurs magistr,
[2]fizika-matematika fanlari doktori, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Matematika instituti yetakchi ilmiy xodimi
https://doi.org/10.5281/zenodo.20609747

Annotatsiya. *Mazkur maqolada vaqt bo‘yicha $\alpha \in (0;1)$ tartibli Caputo kasr hosilasi qatnashgan uchinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun chorak tekislikda chegaravi masalalar tadqiq qilingan. Dirixle, Neyman va nolokal integral shartlardan iborat uch turdagi chegaraviy masalalar qo‘yilgan. Masala yechimi ketma-ket Laplas almashtirishlari usuli yordamida topilib, Grin funksiyalari orqali integral ko‘rinishda ifodalangan.*

Kalit so‘zlar: *Kasr hosila, Caputo operatori, uchinchi tartibli tenglama, chegaraviy masala, Grin funksiyasi, Mittag–Leffler funksiyasi.*

Kasr tartibli differensial tenglamalar fizika, biologiya va muhandislikning ko‘plab sohalarida anomal diffuziya, viskoelastiklik va xotiraga ega muhitlardagi to‘lqin jarayonlarini modellashtirishda qo‘llaniladi. Ayniqsa, vaqt bo‘yicha kasr hosilalarni o‘z ichiga olgan yuqori tartibli tenglamalar murakkab to‘lqin dinamikasini ifodalaydi. Quyida, uchinchi tartibli tenglamalarni umumlashtiruvchi, vaqt bo‘yicha $\alpha \in (0;1)$ tartibli Caputo ma’nosidagi kasr hosila qatnashgan tenglama uchun $\Omega = \{(x,t): x>0, t>0\}$ ya’ni, chorak tekisligida chegaraviy masalalar qo‘yilgan va yechimlari Furye, Laplas almashtirishlari hamda Riman–Liouville operatorlari asosida aniq integral ko‘rinishda topilgan.
Qaralayotgan tenglamaning umumiy ko‘rinishi quyidagicha:

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) + a u_{xxx}(x,t) + b u_x(x,t) = f(x,t) $$

Bu yerda:

- ${}_C D_{0t}^{\alpha} - \alpha$ - tartibli $(0<\alpha<1)$ Caputo kasr hosila operatori.
- a,b – o‘zgarmas koeffitsiyentlar.
- $f(x,t)$ – berilgan funksiya.

Chegaraviy va boshlang‘ich shartlar:

1. Boshlang‘ich shart: Tenglama vaqt bo‘yicha α-tartibli $(0<\alpha<1)$ kasr hosilaga ega bo‘lgani uchun **bitta** boshlang‘ich shart yetarli: $u(x,0) = \varphi(x)$

Bu yerda, $\varphi(x)$ –berilgan yetarlicha silliq funksiya.

2. Cheksizlikdagi shartlar: Tenglama x bo‘yicha uchinchi tartibli bo‘lgani uchun jami uchta chegara sharti kerak. Cheksizlikda yechim va uning birinchi hosilasi nolga intiladi deb olinadi **(**ikkita shart**):**

$$ \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) = 0 \\ \lim\limits_{x\to\infty} u_x(x,t) = 0 \end{cases} $$

3. $x=0$ nuqtadagi chegaraviy shart: Yuqoridagi cheksizlikdagi ikkita shart hisobiga, $x=0$ da **faqat bitta** chegaraviy shart qo‘yiladi. Quyida uch xil turdagi chegaraviy masala alohida keltirilgan (har biri mustaqil masala):

3.1. Birinchi chegaraviy masala (Dirixle tipidagi):

$$u(0,t)=\varepsilon_1(t)$$

Bu yerda, $\varepsilon_1(t)$— berilgan yetarlicha silliq funksiya. Bu shart chegaradagi qiymatni (temperatura, siljish va h.k.) bevosita beradi.

3.2. Ikkinchi chegaraviy masala (Neyman tipidagi):

$$u_x(0,t)=\varepsilon_2(t)$$

Bu yerda, $\varepsilon_2(t)$ — berilgan yetarlicha silliq funksiya. Bu shart chegaradagi oqimni (issiqlik oqimi, kuchlanish va h.k.) beradi.

3.3. Uchinchi chegaraviy masala (lokal bo‘lmagan integral shart):

$$u_x(0,t)+\lambda\int_0^t u(0,\tau)K(t-\tau)\,d\tau=\varepsilon_3(t)$$

Bu yerda,

- λ — *haqiqiy konstanta (bog‘lanish koeffitsienti),*
- $K(t-\tau)$— *xotira yadrosi (masalan, darajali yadro* $K(t-\tau)=\dfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ *yoki eksponensial yadro* $K(t-\tau)=e^{-\beta(t-\tau)}$*)*
- $\varepsilon_3(t)$— *berilgan funksiya.*

Bu shart chegaradagi oqim (u_x) va funksiyaning o‘tmishdagi qiymatlari $(u(0,\tau),0<\tau<t)$ o‘rtasidagi bog‘liqlikni ifodalaydi. Kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasida aynan shunday shartlar tabiiy ravishda paydo bo‘ladi.

4.*Yechish metodologiyasi:*

Masalani yechish uchun ketma-ket integral almashtirishlar usuli qo‘llaniladi.

Vaqt bo‘yicha Laplas almashtirishi $(t\to s)$**:**

Caputo hosilasi uchun: $L\left\{{}_C D_{0t}^{\alpha}u(x,t)\right\}=s^{\alpha}U(x,s)-s^{\alpha-1}\varphi(x)$

Tenglama x bo‘yicha oddiy differensial tenglamaga aylanadi:

$$aU_{xxx}(x,s)+bU_x(x,s)+s^{\alpha}U(x,s)=F(x,s)+s^{\alpha-1}\varphi(x)$$

Fazo bo‘yicha Laplas almashtirishi $(x\to\xi)$**:**

Yarim cheksiz soha $(x>0)$ uchun chegaraviy shartlarni hisobga olgan holda, $U(x,s)$ funksiyaga nisbatan yana Laplas almashtirishi bajariladi. Bu algebraik tenglamaga olib keladi. Uning yechimi teskari almashtirish orqali topiladi va cheksizlikdagi so‘nish shartlarini qanoatlantiruvchi hadlar ajratib olinadi.

Bunda, $L\{U(x,s)\}=\overline{U}(\xi,s)$ belgilaymiz. Laplas almashtrishlaridan keyin tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\overline{U}(\xi,s)=\frac{\overline{F}(\xi,s)+s^{\alpha-1}\overline{\varphi}(\xi)+a\xi^2U(0,s)+a\xi U_x(0,s)+aU_{xx}(0,s)+bU(0,s)}{a\xi^3+b\xi+s^{\alpha}}$$

Teskari almashtirishlar va yechim

Ketma-ket L_{ξ}^{-1} va L_{s}^{-1} teskari almashtirishlari bajariladi. Yechim integral ko‘rinishda topiladi:

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}G_1\varphi d\omega+\int_0^{t}G_2\varepsilon d\tau+\iint_{\Omega}G_3 fd\omega d\tau$$

bu yerda, G_1,G_2,G_3 — umumlashgan Mittag–Leffler va Rayt funksiyalari orqali ifodalangan Grin funksiyalari.

Xulosa

Ushbu ishda kasr hosilali uchinchi tartibli tenglama uchun chorak tekislikda asosiy chegaraviy masalalar to‘liq qo‘yildi va ularni yechishning analitik usuli ishlab chiqildi. Olingan natijalar xotiraga ega muhitlardagi to‘lqin jarayonlarini modellashtirish uchun nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J., 2006, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, 204 Edition, North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V., Amsterdam.

2. Podlubny I., 1999, Fractional Differential Equations, In: Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198. San Diego, Calif, USA: Academic Press.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПРЯДКА

К.О.Махмудов, У.Х.Турсунмуродова

[1, 2] Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Узбекистан

https://doi.org/10.5281/zenodo.20609767

Пусть D — область в пространстве R^3 с гладкой границей ∂D, состоящей из конечного числа кусочно-гладких поверхностей, S — часть границы ∂D. Пусть $u(y)$ — решение уравнения

$$(\Delta^2 - \Delta)u(x) = 0, \qquad (1)$$

имеющая непрерывные частные производные не выше 4-го порядка в D. Такие решения называют *регулярными*. Обозначим через $\Phi(x, y)$ фундаментальное решение уравнения (1) в R^3

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\exp(-|x-y|)-1}{|x-y|}, \quad x \neq y.$$

Если к правой части прибавить произвольное регулярное решение, результат останется фундаментальным решением уравнения. Таким образом, рассматриваем следующую задачу Коши:

Требуется найти решение $u(x)$ в $x \in D$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} (\Delta^2 - \Delta)u(x) = 0 & в\ D, \\ u(y) = u_0(y) & на\ S, \\ \partial_\nu u(y) = u_1(y) & на\ S, \\ \Delta u(y) = u_2(y) & на\ S, \\ \partial_\nu(\Delta u(y)) = u_3(y) & на\ S. \end{cases} \qquad (2)$$

Это задача является некорректной, и она имеет не более одного решения, то есть: 1) решение существует не для любых данных; 2) решение не зависит непрерывно от данных Коши на S [1-3].

Пусть S является гладкой частью на границы D. Задача Коши для уравнения (1) в D с данными на S состоит в следующем. Найти решение $u(x)$ удовлетворяющее $(\Delta^2 - \Delta)u(x) = 0$ внутри D и такое, что $u(y) = u_0(y)$, $\partial_\nu u(y) = u_1(y)$, $\Delta u(y) = u_2(y)$ и $\partial_\nu(\Delta u(y)) = u_3(y)$ на S т.е., (2).

Для изучения задачи (2)- введем интеграл полностью определенный данными Коши u_0, u_1, u_2 и u_3 на S, а именно

$$\mathrm{G}(x) = \int_S \Big(\Phi(x-y)u_3 - u_2 \partial_\nu \big(\Phi(x-y)\big) + \Delta_y \big(\Phi(x-y)\big)u_1 - u_0 \partial_{\nu_y} \big(\Phi(x-y)\big) \Big) ds$$

для $x \in \mathrm{R}^3 \setminus \overline{S}$. Поскольку фундаментальное решение $\Phi(x-y)$ является вещественно аналитическим, то $G(x)$ является вещественно аналитической в дополнение $\overline{S}$. Более того, интеграл $G(x)$ удовлетворяет уравнения $(\Delta^2 - \Delta)G = 0$ в $\mathrm{R}^3 \setminus \overline{S}$.

Теорема 1. *Для того чтобы существовало решение u задачи Коши (2), непрерывное вместе со своими производными до третьего порядка вплоть до S, необходимо и достаточно, чтобы интеграл $G(x)$ может быть продолжен из $\mathrm{R}^3 \setminus D$ через S внутрь D как вещественно аналитическая функция.*

Теорема 2. *Для каждого решения $u \in C^3(D \cup S)$ уравнения (1) имеет место формула*

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} \int_S \Big(C_n(x,y)\partial_\nu(\Delta u(y)) - \Delta u(y)\partial_\nu\left(C_n(x,y)\right)$$

$$+\Delta_y\left(C_n(x,y)\right)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_{\nu_y}(C_n(x,y))\Big) ds_y$$

Карлемана при всех $x \in D$.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Айзенберг, Н. Н. Тарханов, “Условно устойчивые задачи и формулы Карлемана”, Сиб. матем. журн., 31:6 (1990), 9–15.
2. N. N. Tarkhanov, The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations, Math. Top., 7, Akademie Verlag, Berlin, 1995.
3. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. — М. : Наука, 1980. — 286 с.

BRAXISTOXRON MASALASI: TARIXI VA MATEMATIK TAHLILI

Narjigitov Xusanbay[1], Ortiqboev G‘ayrat[2]
[1]Guliston davlat universiteti dotsenti, f-m.f.n., dotsent,
[2]Guliston davlat universiteti talabasi
https://doi.org/10.5281/zenodo.20609795

Annotatsiya. *Ushbu maqolada braxistoxron masalasining tarixi, uning matematik qo‘yilishi va yechimi tahlil qilinadi. Masalaning variatsion hisobdagi o‘rni, shuningdek uning yechimi sifatida sikloidaning kelib chiqishi yoritiladi.*

Kalit so‘zlar: *eng tez etib kelish, braxistoxron masalasi, sikloida*

Abstract. *This article analyzes the history of the brachistochrone problem, its mathematical formulation, and solution. The problem's place in the calculus of variations is discussed, as well as the origin of the cycloid as its solution.*

Keywords: *Steepest descent (or shortest path time), brachistochrone problem, cycloid.*

Аннотация. *В данной статье анализируется история проблемы брахистохроны, её математическая формулировка и решение. Обсуждается место проблемы в вариационном исчислении, а также происхождение циклоиды как её решения.*

Ключевые слова: *Наибыстрейший спуск (или время кратчайшего пути), задача о брахистохроне, циклоида.*

1696 yilda shveytsariyalik matematik Iogann Bernulli quyidagi masalani e’lon qildi: Ikkita nuqta orasida (birinchi nuqta yuqorida, ikkinchisi pastda) joylashgan sharcha faqat og‘irlik kuchi ta’sirida eng qisqa vaqtda qaysi chiziq bo‘ylab tushadi?

Bu braxistoxron masalasi bo‘lib, oddiy savoldek ko‘rinsa ham, u matematika tarixida yangi sohaning paydo bo‘lishiga sabab bo‘lgan. U olimlarga “eng qisqa emas , balki eng tez” tushunchasini o‘rgatgan. Bu masalaning echimi tsikloidaning yarim arki bo‘lib, bunda sharcha:

– boshida sharcha juda tez pastga tushadi;

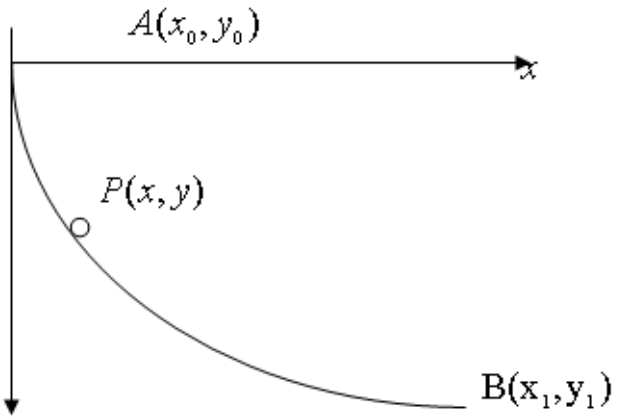
– keyin harakat sekinlashadi;

– bu esa umumiy vaqtni minimal qiladi.

Bu masalani hal qilishda I.Nyuton, Y. va D.Bernullilar, J.Lagranj, A.Lejandr va L.Eyler salmoqli hissa qo‘shganlar. Buning natijasida yangi-yangi masalalar va ularni yechish metodlari yaratilib, bu esa matematika fanining katta tatbiqiy ahamiyatga ega bo‘lgan yangi va muhim sohasi-**variatsion hisob** sohasining paydo bo‘lishiga sabab bo‘ldi.

Yetarlilik shartlari bilan birinchi marta Veyershtrass, keyinchalik A.Lejandr shug‘ullandi.

1.Braxistaxron masalasi.



1-chizma

Berilgan $A(x_0, y_0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi chiziq bo‘ylab moddiy nuqta o‘z og‘irligi ta’sirida tushadi. Jismning traektoriasi qanday bo‘lganda tushish vaqti eng qisqa bo‘ladi?

Nuqtalarni 1-chizmadagidek joylashtiraylik. Bunda $A(x_0, y_0)$ nuqta koordinatalar boshida, ordinatalar o‘qi esa pasrga, absissalar o‘qi gorizantal yo‘nalgan. Bu yerda biz eng qisqa vaqt degan bilan eng qisqa yo‘l tushunchasini chalkashtirmasligimiz kerak. Bizning masalamizda izlanayotgan chiziq to‘g‘ri chiziq bo‘la olmaydi, chunki bu holda tushayotgan moddiy nuqtaning tezligi sekin ortadi, bunga vaqt ko‘p ketadi, undan tikroq bo‘lgan egri chiziqning qismida esa harakat tezligi tez ortib, yo‘lning ko‘proq qismini kattaroq tezlik bilan o‘tadi. Bunda esa vaqt tejaladi. Harakatdagi nuqta t vaqtda $P(x, y)$ holatda va $v(x, y, t)$ tezlikka ega bo‘lsin.

Boshlang‘ich tezlik $v = 0$ desak, ogirlik kuchining bajargan ishi mgy bo‘lib, quyidagi harakat tenglamasini yozsak bo‘ladi:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy$$

bunda $\frac{mv^2}{2}$ harakatlanuvchi kuchning $t = 0$ dan ixtiyoriy t vaqtgacha bo‘lgan orttirmasi. So‘ngi tenglikdan

$$v = \sqrt{2gy} \quad \text{va} \quad dt = \frac{ds}{v}$$

bo‘lgani uchun moddiy nuqta harakatidagi elementar vaqt

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}\,dx}{\sqrt{2gy}},$$

AB yoyni o‘tishga ketgan vaqt esa

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx$$

bu yerda o‘zgarmas ko‘paytuvchilarni hisobga olmasak, braxistaxrona masalasini yechish ushbu

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx \qquad (1)$$

Integralga minimum qiymat beruvchi $y(x)$ funksiyani izlashimiz kerak ekan.

Bitta vertikal to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan berilgan A va B nuqtalarni tutashtiruvchi shunday chiziqni topish kerakki, A dan B ga tushayotgan moddiy nuqta shu chiziq bo‘ylab A dan B ga eng qisqa vaqtda tushsin. (Taranglik va muhitning qarshiligini hisobga olmang).

Yechish. Koordinata boshini A nuqtaga joylashtiramiz, Ox o‘qni gorizontal, Oy o‘qni esa pastga vertikal yo‘naltiramiz. Moddiy nuqtaning harakat tezligi $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$ ga teng, bundan nuqtaning $A(0,0)$ holatdan $B(a,b)$ holatga etib borishiga sarflanadigan vaqtni hisoblab topamiz:

$$J[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx; \quad y(0)=0,\ y(a)=b.$$

Bu funksional eng sodda hollardan biri (4-hol)ga tegishli bo‘lganligi uchun, uning Eyler tenglamasi $F - y'F_{y'} = C$ ko‘rinishdagi birinchi integralga ega, yoki biz qarayotgan holda

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C,$$

bundan ba’zi soddalashtirishlardan so‘ng $\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C$ yoki $y(1+y'^2) = C_1$ tenglamalarga ega bo‘lamiz. $y' = ctg\,t$ deb olib, t parametrni kiritamiz; natijada

$$y = \frac{C_1}{1+ctg^2 t} = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2t);$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t\,dt}{ctg\,t} = 2C_1 \sin^2 t\,dt = C_1(1-\cos 2t)\,dt;$$

$$x = C_1\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2.$$

Demak, izlanayotgan chiziqning parametrik shakldagi tenglamasi

$$x - C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t), \quad y = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2t)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Agar $2t = t_1$ almashtirish bajarib, $x=0,\ y=0$ bo‘lganda $C_2 = 0$ bo‘lishini e’tiborga olsak, u holda tsikloidalar oilasining tenglamasini hosil qilamiz:

$$x = \frac{C_1}{2}(t_1 - \sin t_1), \quad y = \frac{C_1}{2}(1-\cos t_1),$$

bu yerda $\frac{C_1}{2}$ - aylanayotgan doiraning radiusi bo‘lib, u sikloidaning $B(a,b)$ nuqtadan o‘tish shartidan aniqlanadi. Shunday qilib, braxistoxrona bu sikloida ekan.

Braxistoxron masalasi nafaqat tarixiy ahamiyatga ega, balki zamonaviy matematika va fizikaning muhim asoslaridan biri hisoblanadi. Uning yechimi – tsikloida – tabiatdagi optimallik qonunlarining yaqqol namunasidir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционалъного анализа. М.: Наука, 1989 г.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Миҳенко Е.Ф. Математическая теория оптималъных процессов. М.: Наука, 1983 г.
3. Алексеев В. М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптималное управление. – М., Физматлит, 2005. – 384 с.
4. H. Norjigitov, J.A. Bahramov, “MATEMATIK OLIMPIADA MASALALARINI YECHISH UCHUN QO‘LLANMA”, Toshkent-2014.
5. Mal Coad and others, *Mathematics for the international students*, Haese and Harris publocations, Australia, 2010.
6. К.Жамуратов, Д.Абдухалимов, «ПРОЕКТИВ ТЕКИСЛИК ВА ПРОЕКТИВ ТЕКИСЛИКНИНГ БИР ЖИНСЛИ КООРДИНАТАЛАРИ» Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». Выпуск №68-3 (том 2) (ноябрь, 2025), 334-344.
7. Жамуратов К., Умаров Х. Р., Холбоев С. Решение одной задачи теории фильтрации методом квазистационарного приближения. ГулДУ ахборотномаси, №2, 2016 йил, 9-13 бетлар.
8. Жамуратов, К., Умаров, Х. Р., & Турдимуродов, Э. М. (2024). *О решении методом регуляризации одной системы функциональных уравнений с дифференциальным оператором* (Doctoral dissertation, Белорусско-Российский университет)
9. Umarov, K. R. (2025). Methods For Construction Of The Zhegalkin Polynomial. *TLEP–International Journal of Multidiscipline*, *2*(5), 76-79.
10. Umarov, X., & Goyibnazarov, K. (2025, October). Some Principles Of Creative Training And Education Of Modern Youth. In *International Conference on Global Trends and Innovations in Multidisciplinary Research* (Vol. 1, No. 4, pp. 91-93).
11. Goyibnazarov, K., & Umarov, X. (2025, October). Biological Applications Of The Definite Integral. In *International Conference on Global Trends and Innovations in Multidisciplinary Research* (Vol. 1, No. 4, pp. 84-87).
12. Narjigitov, X., Umarov, X. R., & Kuchkarova, S. I. (2026). CHIZIQLI INTEGRAL TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI TARIXI HAQIDA. *SHOKH LIBRARY*, *1*(1).
13. Umarov X.R., Abduraximova D.D. “MATEMATIKADAN OLIMPIADA MASALALARINI YECHISHDA MATEMATIK ANALIZ METODLARIDAN FOYDALANISH” / Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №68 (том 2) (январь, 2025). Дата выхода в свет: 31.01.2025. с. 68-74.
14. Umarov X.R., Asqarbekova D.J. // “НАТУРАЛ СОНЛАР ҚАТОРИ ДАРАЖАЛАРИ ЙИҒИНДИСИНИ ТОПИШНИНГ БИР УСУЛИ” Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №68 (том 2) (январь, 2025). Дата выхода в свет: 31.01.2025. с. 74-84.
15. Umarov X.R., Erkinov Sh.B. // “YIG‘INDI VA KO‘PAYTMALARNI HISOBLASHDA KOMPLEKS ANALIZ METODLARIDAN FOYDALANISH” Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №68 (том 2) (январь, 2025). с. 84-103.
16. Наржигитов Х., Умаров Х. «БИОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛ» “Raqamli texnologiyalar va sun’iy intellektni rivojlantirishning zamonaviy

holati va istiqbollari” mavzusida ilmiy-amaliy anjumani materiallari to‘plami – Guliston, 2022 y.

17. Умаров Х.Р., Эгамбердиева С.Н. АЙРИМ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШДА ЧЕГИРМАЛАР НАЗАРИЯСИДАН ФОЙДАЛАНИШ. Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №78 (том 1) (ноябрь, 2025). стр, 161-177.
18. Umarov X.R., Abdurasulov O.U. O‘LCHOVLI FUNKSIYALAR FAZOSI UCHUN DUALLIK PRINSIPI Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №78 (том 1) (ноябрь, 2025). стр. 178-188.
19. Х.Умаров, З.Олимов. КЕТМА-КЕТЛИКЛАР l^p ФАЗОСИДАГИ ФУНКЦИОНАЛЛАРНИНГ УМУМИЙ КЎРИНИШИ. Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №78 (том 1) (ноябрь, 2025) Стр. 189-193.
20. Умаров Х.Р., Райимқулова К.Б. Турли N-функциялар аниқлаган Орлич фазоларини таққослаш. Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». Выпуск №68-3 (том 2) (ноябрь, 2025). стр. 482-487.
21. Умаров Х.Р., Маматкаримова М.И. КОШИ ТЕНГСИЗЛИГИ ВА УНИНГ ТАТБИҚЛАРИ. Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». Выпуск №68-3 (том 2) (ноябрь, 2025). с. 477-481.
22. X.Narjigitov, X.R.Umarov, S.I.Kuchkarova, & Worldly Knowledge Publishing Centre. (2026). CHIZIQLI INTEGRAL TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI TARIXI HAQIDA. B ILMIY TADQIQOTLAR VA ULARNING YECHIMLARI (T.9, Выпуск 01, cc. 219–223). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.18227815.

DAVRIY FUNKSIYALAR SINFIDA MODIFITSIRLANGAN KORTEVEG-DE FRIZ – SINH - GORDON TENGLAMASI UCHUNARALASH MASALA

H.N. Normurodov[1], A. Muzaffarov[2], N. Suyunova[3]
[1]Samarqand davlat univrsiteti assistenti, Phd, [2]Samarqand davlat univrsiteti magistranti,
[3]Samarqand davlat univrsiteti talabasi
https://doi.org/10.5281/zenodo.20609828

Annotatsiya. *Mazkur ishda davriy koeffitsiyentli Dirak operatoriga qo‘yilgan teskari spektral masala usuli yordamida modifitsirlangan Korteveg-de Friz – sinh - Gordon tenglamasiga qo‘yilgan aralash masalaning yechimini topish algoritmi keltirilgan*
Kalit so‘zlar: *Modifitsirlangan Korteveg-de Friz - sinh - Gordon tenglamasi, Dirak operatori, teskari spektral masala, Dubrovin differensial tenglamalar sistemasi, izlar formulasi*
Аннотация. *В данной работе приведён алгоритм нахождения решения смешанной задачи для модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза – sinh-Гордона, основанный на методе обратной спектральной задачи для оператора Дирака с периодическими коэффициентами.*
Ключевые слова: *модифицированное уравнение Кортевега-де Фриса - sinh - Гордона, оператор Дирака, обратная спектральная задача, система дифференциальных уравнений Дубровина, формула следа.*
Abstract. *This paper presents an algorithm for solving a mixed problem for the modified Korteweg–de Vries–sinh-Gordon equation based on the inverse spectral method for the Dirac operator with periodic coefficients.*
Keywords: *Modified Korteweg-de Vries - sinh - Gordon equation, Dirac operator, inverse spectral problem, Dubrovin system of differential equations, trace formula*

Ushbu

$$q_{xt}=a\left\{q_{xxxx}-6q_x^2q_{xx}\right\}+b\sinh(2q),\quad q=q(x,t),\ x\in\mathbb{R},\ t>0 \qquad (1)$$

modifitsirlangan Korteveg-de Friz – sinh - Gordon tenglamasiga qo‘yilgan

$$\begin{cases} q(x,t)\big|_{t=0}=q_0(x),\quad q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^6(\mathbb{R}), \\ q(x,t)\big|_{x=0}=q_1(t),\ q_1(t)\in C^1(t>0)\cap C(t\ge 0),\ q_1(0)=q_0(0) \end{cases} \qquad (2)$$

aralash masalaning x o‘zgaruvchi bo‘yicha π davrli haqiqiy cheksiz zonali hamda

$$q(x+\pi,t)=q(x,t),\quad q(x,t)\in C_{x,t}^{4,1}(t>0)\cap C(t\ge 0) \qquad (3)$$

silliqlik shartlarini qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasini qaraymiz. Bu yerda a,b - o‘zgarmas sonlar.

Agar (1) tenglamada, $a=1,b=0$ bo‘lsa, u holda $q_x(x,t)$ funksiyaga nisbatan modifitsirlangan Korteveg-de Friz tenglamasi [1], $a=0,b=1$ bo‘lganda esa sinh - Gordon [2] tenglamasi kelib chiqadi.

Ushbu

$$y_x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} q_x & -2\lambda \\ 2\lambda & -q_x \end{pmatrix}y,\ y_t=\left\{a\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}+\frac{b}{4\lambda}\begin{pmatrix} 0 & e^{q} \\ -e^{-q} & 0 \end{pmatrix}\right\}y$$

chiziqli differensial tenglamalarning birgalikdalik, ya’ni $y_{xt}=y_{tx}$ sharti $q(x,t),\ x\in\mathbb{R},\ t>0$ funksiyaga nisbatan (1) tengamaga ekvivalent bo‘ladi. Bu yerda

$$A=-2\lambda^2 q_x-\frac{1}{4}q_x^3+\frac{1}{2}q_{xxx},\quad B=\lambda q_{xx}+4\lambda^3+\frac{\lambda}{2}q_x^2,\quad C=\lambda q_{xx}-4\lambda^3-\frac{\lambda}{2}q_x^2.$$

Ushbu ishda, (1) - (3) Koshi masalasining $q(x,t),\ x\in\mathbb{R},\ t>0$ yechimini

$$L(\tau,t)y\equiv B\frac{dy}{dx}+\Omega(x+\tau,t)y=\lambda y,\ x,\tau\in\mathbb{R},\ t>0 \qquad (4)$$

davriy koeffitsiyentli Dirak operatoriga qo‘yilgan teskari spektral masalalar usulidan foydalangan holda, topish algoritmi keltirilgan. Bu yerda

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \Omega(x,t)=\begin{pmatrix} 0 & q_x(x,t) \\ q_x(x,t) & 0 \end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

(4) tenglamaning $c(0,\lambda,\tau,t)=(1,0)^T$, $s(0,\lambda,\tau,t)=(0,1)^T$ boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarini mos ravishda

$c(x,\lambda,\tau,t)=\left(c_1(x,\lambda,\tau,t),c_2(x,\lambda,\tau,t)\right)^T$ va $s(x,\lambda,\tau,t)=\left(s_1(x,\lambda,\tau,t),s_2(x,\lambda,\tau,t)\right)^T$

orqali belgilaymiz. Ushbu $\Delta(\lambda,\tau,t)=c_1(\pi,\lambda,\tau,t)+s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$ funksiyaga (4) Dirak tenglamasining Lyapunov funksiyasi deyiladi.

Ushbu $(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}),\ n\in\mathbb{Z}$ intervallarga lakunalar deyiladi. $\lambda_n=\lambda_n(\tau,t)$ lar (4) tenglamaga qo‘yilgan davriy yoki yarimdavriy $y(0,\tau,t)=\pm y(\pi,\tau,t)$ chegaraviy masalaning xos qiymataridan iborat bo`lib, $\Delta(\lambda,\tau,t)\mp 2=0$ tenglamaning ildizlari bilan ustma-ust tushadi hamda $\lambda_{-1}=\lambda_0=0$ bo‘ladi. Ma’lumki [3], (4) Dirak tenglamasining Lyapunov funksiyasi τ parametrga bog‘liq bo‘lmaydi, shu bois $\lambda_n(\tau,t)=\lambda_n(t)$ bo‘ladi.

$s_1(\pi,\lambda,\tau,t)=0$ tenglamaning ildizlarini $\xi_n(\tau,t),\ n\in\mathbb{Z}$ lar orqali belgilab olamiz. Ma'lumki, $\xi_n(\tau,t),\ n\in\mathbb{Z}$ sonlar (4) tenglamaga qo‘yilgan $y_1(0,\tau,t)=0,\ y_1(\pi,\tau,t)=0$ Dirixle chegaraviy masalasining xos qiymatlaridan iborat bo‘lib, $\xi_n(\tau,t)\in\left[\lambda_{2n-1}(t),\lambda_{2n}(t)\right],\ n\in\mathbb{Z}$ bo‘ladi. Shu bois $\lambda_{-1}=\lambda_0=\xi_0=0$ bo‘ladi.

$\xi_n(\tau,t),\ n\in\mathbb{Z}$ sonlar va $\sigma_n(\tau,t)=sign\left\{s_2(\pi,\xi_n,\tau,t)-c_1(\pi,\xi_n,\tau,t)\right\}=\pm 1,\quad n\in\mathbb{Z}$ ishoralar ketma-ketligiga $L(\tau,t)$ Dirak operatorning spektral parametrlari deyiladi. Spektral parametrlar $\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t)=\pm 1,\ n\in\mathbb{Z}$ va (4) tenglamaga qo‘yilgan davriy yoki yarimdavriy $y(0,\tau,t)=\pm y(\pi,\tau,t)$ chegaraviy masalaning xos qiymatari $\lambda_n(t),n\in\mathbb{Z}$ lar birgalikda $L(\tau,t)$ Dirak operatorining spektral berilganlari deyiladi.

Berilgan $q(x+\tau,t)$ koeffitsiyentli $L(\tau,t)$ Dirak operatorining $\left\{\lambda_n(t),\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t)=\pm 1\right\},n\in\mathbb{Z}$ spektral berilganlarini topish masalasiga spektral analizning to‘g‘ri masalasi, aksincha $\left\{\lambda_n(t),\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t)=\pm 1\right\},n\in\mathbb{Z}$ spektral berilganlar orqali $L(\tau,t)$

Dirak operatorining $q(x+\tau,t)$ koeffitsiyentini tiklash masalasiga spektral analizning teskari masalasi deyiladi.

Teorema [4]. $L(\tau,t)$ Dirak operatorining $q(x+\tau,t)$ koeffitsiyenti o`zining spektral berilganlari orqali bir qiymatli aniqlanadi.

Dastlab, boshlang‘ich shartda berilgan $q_0(x+\tau),\ x,\tau\in\mathbb{R}$ funksiya orqali $L(\tau,0)$ Dirak operatirini tuzib olamiz:

$$L(\tau,0)y\equiv B\frac{dy}{dx}+\Omega_0(x+\tau)y=\lambda y,\ x,\tau\in\mathbb{R}$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ \Omega_0(x)=\begin{pmatrix}0 & q_0'(x)\\ q_0'(x) & 0\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}.$$

So‘ngra, to‘g‘ri masalani yechib, $L(\tau,0)$ Dirak operatorining $\left\{\lambda_n^0,\ \xi_n^0(\tau),\ \sigma_n^0(\tau),\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$ spektral berilganlarini topamiz.

1-teorema. Agar $q(x,t),\ x\in\mathbb{R},\ t>0,$ funksiya (1) - (3) aralash masalaning yechimi bo‘lsa, u holda, $L(\tau,t)$ Dirak operatorining $\left\{\lambda_n(\tau,t),\ \xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t)=\pm1\right\},\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ spektral berilganlari quyidagi Dubrovin differensial tenglamalar sistemasi analogini qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial\lambda_n(\tau,t)}{\partial t}=0,\ \text{ya’ni}\ \lambda_n(\tau,t)=\lambda_n(\tau)=\lambda_n^0;$$

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)g_n(\xi),\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \qquad (5)$$

Bundan tashqari quyidagi boshlang‘ich shartlar ham o‘rinli:

$$\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\xi_n^0(\tau),\ \sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau),\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \qquad (6)$$

$g_n(\xi),\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ketma-ketlik esa quyidagi formulalar orqali aniqlanadi:

$$g_n(\xi)=a\left[4\xi_n^3(\tau,t)+2\xi_n(\tau,t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2}{2}-\xi_k^2(\tau,t)\right)\right]+$$

$$+\frac{b}{2\xi_n(\tau,t)}\exp\left\{q_1(t)+\int_0^{\tau}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(s,t)h_k(\xi)\right)ds\right\}$$

Bu yerda

$$\xi=\xi(\tau,t)=\left(\ldots,\xi_{-1}(\tau,t),\xi_1(\tau,t),\ldots\right),\ \sigma=\sigma(\tau,t)=\left(\ldots,\sigma_{-1}(\tau,t),\sigma_1(\tau,t),\ldots\right).$$

2-teorema. Agar boshlang‘ich shartda berilgan $q_0(\tau)$ va $q_1(t)$ funksiyalar ushbu

$$q_0(\tau+\pi)=q_0(\tau)\in C^6(\mathbb{R}),\ q_1(t)\in C^1(t>0)\cap C(t\geq0),\ q_1(0)=q_0(0)$$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda (1) - (3) masalaning

$$q(\tau,t)=q_1(t)+\int_0^{\tau}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(s,t)h_k(\xi)\right)ds \qquad (7)$$

formula orqali aniqlangan yagona $q(\tau,t),\ \tau\in\mathbb{R},\ t>0$ yechimi mavjud bo‘ladi.

(1) - (3) aralash masalaning yechimini topish algoritmi:

1. $L(\tau,0)$ Dirak operatorining $\lambda_n^0, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ spektral berilganlarini topib olamiz.

2. $\lambda_n^0, \xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ orqali $L(\tau,t)$ Dirak operatorining spektral berilganlarini belgilaymiz. Ixtiyoriy τ da (5) - (6) Koshi masalasini yechib, $\xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t), n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ spektral parametrlarni topib olamiz.

3. Topilgan bu yechimlarni (7) izlar formulasiga qo‘yib, $q(\tau,t)$ funksiyani ya’ni, (1) - (3) masalaning yechimini topamiz.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Wadati M., The modified Korteweg-de Vries equation, J. Phys. Soc. Jpn., 1973, 34(5), 1289-1296.
2. Grauel, A. Sinh-Gordon equation, Painlevé property and Bäcklund transformation. Phys. A Stat. Mech. Its Appl. 1985, 132, 557–568.
3. А. Б. Хасанов, А. М. Ибрагимов, “Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом”, Узб. матем. журн., 3:4 (2001), 48–55.
4. В.А. Маченко Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев, «Наукова Думка» 1977.

A. B. Khasanov, Kh. N. Normurodov, U. O. Khudayorov, Integrating the modified Korteweg–de Vries–sine-Gordon equation in the class of periodic infinite-gap functions, Theoret. and Math. Phys. 214:2 (2023), 170–182.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Туракулов Хамидулло Шамсидинович[1], Жураев Шукур Юсупович[2], Имомназаров Мухаммадяхё Муродович[3]

[1,2]Кокандский государственный университет;

[3]Кокандский государственный университет, магистрант 1 курса направления «Методика преподавания точных и естественных наук (Математика)».

https://doi.org/10.5281/zenodo.20609864

Как нам известно в работах [1,2] для уравнения смешанного типа как первого, так и второго рода второго порядка в ограниченных областях изучены корректность некоторых нелокальных краевых задач. А для уравнения Трикоми в неограниченном параллелепипеде такие задачи изучены в работах [3,4]. В данной работе с использованием результатов работ [1-4], с применением преобразования Фурье, изучено однозначной разрешимостью некоторой нелокальной краевой задачи для трёхмерного уравнения Чаплыгина в неограниченном параллелепипеде.

В области $G=(-1,1)\times(0,T)\times R=Q\times R=\{(x,t,z),x\in(-1,1),t\in(0,T),z\in R\}$,

рассмотрим трёхмерное уравнения Чаплыгина:

$$Lu=K(x)u_{tt}-\Delta u+a(x,t)u_t+c(x,t)u=f(x,t,z), \qquad (1)$$

где $xK(x)\geq 0, \quad x\in(-1,1); \quad \Delta u=u_{xx}+u_{zz}$ - оператор Лапласа.

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области Q.

Нелокальная краевая задача

Найти обобщённое решение $u(x,t,z)$ уравнения (1) из пространства $W_2^{2,3}(G)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p u\big|_{t=0}=D_t^p u\big|_{t=T}, \qquad (2)$$

$$D_x^p u\big|_{x=-1}=D_x^p u\big|_{x=1}, \qquad (3)$$

$$\lim_{|z|\to\infty}u=0,\ \lim_{|z|\to\infty}u_z=0 \qquad (4)$$

при $p=0,1$, где $D_t^p u=\dfrac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u=u$, $\gamma-$ некоторые постоянные числа, отличные от нуля, величины которых будут уточнены ниже.

Здесь через $W_2^{2,3}(G)-$ обозначено Банохова пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)}=(2\pi)^{-1/2}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|\lambda|^2)^3\cdot\|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^2(Q)}\,d\lambda,$$

где, $W_2^2(Q)-$ пространства Соболева, через $\hat{u}(x,t,\lambda)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(x,t,z)e^{-i\lambda z}dz$ обозначено преобразование Фурье, функции $u(x,t,z).$

Определение. Обобщённым решением задачи (1)-(4) будем называть функцию $u(x,t,z)\in W_2^{2,3}(G)$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в области G, с условиями (2)-(4).

Теорема. Пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения (1): $2a(x,t)+\mu K(x)\geq\delta_1>0,\quad \mu\, c(x,t)-c_t(x,t)\geq\delta_2>0$ для всех $(x,t)\in\overline{Q},$ где $\mu=\frac{2}{T}\ln|\gamma|>0$ при $|\gamma|>1,\quad |\eta|\geq 1,\quad a(x,0)=a(x,T),\quad c(x,0)=c(x,T)$ для всех $x\in[-1,1].$ Тогда для любой функции $f\in W_2^{1,3}(G),$ такой, что $\gamma\cdot f(x,0,z)=f(x,T,z),$ существует единственное обобщенное решение задачи (1) - (4) из пространства $W_2^{2,3}(G).$

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент.2021г. с-176.

2. Джамалов С.З., Ашуров Р.Р. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве. // Казахский математ журнал. - 2018г,Т18,№2,С.59-70.

3. С.З.Джамалов, Р.Р.Ашуров, Х.Ш.Туракулов.Об одной нелокальной краевой задаче периодического типа для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченной призматической области.// *Бюллетень ИМ АН РУз,2021, №3, с.10-19.*

4. Dzhamalov S.Z., Turakulov Kh.Sh and Sultanov M.S., On a nonlocal boundary value problem for a three-dimensional Trikomi equation in a prismatic unbounded domain. // Lobachevskii journal of mathematics. 2022. Vol. 43(11), P. 3104-3111.

APPLICATIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS TO PROBLEMS IN NATURAL SCIENCES

Umarov Khabibulla[1], Muhammadiyev Maqsudbek[2], Boykuziyeva Markhabo[3]
[1,2,3] Gulistan State University, Uzbekistan, Gulistan
https://doi.org/10.5281/zenodo.20609882

Annotation. *Mathematical models have long been very successfully used in mechanics, physics, and astronomy. In the modern period, the role of mathematical methods in natural science is increasing. They are now widely used in both biology and chemistry. Mathematical models are also successfully applied here. This article contains some of these applications.*

Keywords. *mathematical model, first-order differential equations, Newton's law of cooling (cooling problem), radioactive decay problem, mixture problem (concentration problem)*

Аннотация*. Математические модели давно и весьма успешно применяются в механике, физике, астрономии. В современный период роль математических методов в естествознании все возрастает. Они теперь широко используются и в биологии, и в химии. Здесь также успешно применяются математические модели. Данная статья содержит некоторые из этих применений.*

Ключевые слова. *математическая модель, дифференциальные уравнения первого порядка, задача об охлаждении тела, задача о радиоактивном распаде, задача о концентрации раствора.*

Annotatsiya. *Matematik modellar uzoq vaqtlardan beri mexanika, fizika va astronomiyada juda muvaffaqiyatli qo'llanilib kelinmoqda. Hozirgi davrda esa tabiatshunoslikda ham matematik usullarning roli ortib bormoqda. Ular hozir biologiyada ham, kimyoda ham keng qo'llaniladi. Ushbu maqolada ulardan ba'zilari keltiriladi.*

Kalit so'zlar. *matematik model, birinchi tartibli differensial tenglamalar, jismning sovishi haqidagi masala, radioaktiv yemirilish haqidagi masala, eritma konsentratsiyasi haqidagi masala.*

The role of mathematics in various fields of natural science has varied historically and over time. It has been shaped by two key factors: the level of development of the mathematical apparatus and the degree of maturity of knowledge regarding the object of study – specifically, the ability to describe its main features and properties using mathematical concepts and relations, or, as it is commonly phrased today, the ability to construct a "mathematical model" of the object.

Let us consider a simple example of a mathematical model. Suppose we need to determine the floor area of a room. To do this, we measure the length and width of the room and then multiply the resulting numbers. This elementary procedure essentially means that the real object – the floor – is replaced by an abstract mathematical model: a rectangle. Dimensions obtained from measurements are assigned to the rectangle, and its area is approximately taken as the required area.

A mathematical model, being based on certain simplifications and idealizations, is never identical to the object under consideration; it does not convey all its properties and nuances but serves as an approximate reflection. However, by replacing a real object with its corresponding model, it becomes possible to formulate the study of the object mathematically and use a

mathematical apparatus that is independent of the specific nature of the object. This apparatus allows for a uniform description of a wide range of facts and observations, detailed quantitative analysis, and the ability to predict how the object will behave under various conditions – thereby forecasting future results.

Mathematical models have long been successfully applied in mechanics, physics, and astronomy. In the modern era, the role of mathematical methods in natural sciences is increasing, and they are now widely used in biology and chemistry. This article contains several such applications.

Let us examine a few examples of applying first-order differential equations with separable variables to problems in natural sciences. To solve most problems, the first step is to derive a differential equation (DE) based on a physical law, and the second step is to classify the resulting equation (linear, separable, etc.) to select the appropriate integration method.

Problem 1. (Cooling of a Body). The rate of cooling of a body in the air is proportional to the difference between the temperature of the body and the air temperature. The air temperature is 20° C It is known that within 20 minutes, the body cools from 100° C to 60° C. Determine the law of temperature change Θ as a function of time t.

Solution: According to the conditions of the problem:

$$\frac{d\Theta}{dt}=k(\Theta-20)$$

where k is the proportionality constant. Separating variables and integrating, we get:

$$\frac{d\Theta}{\Theta-20}=kdt \text{ or } \ln(\Theta-20)=kt+\ln C$$

which, after exponentiation, yields:

$$\Theta-20=Ce^{kt}$$

and therefore:

$$\Theta=20+Ce^{kt}.$$

To determine C, we use the initial condition: at $t=0$, $\Theta=100$. Hence, C=80. Thus:

$$\Theta=20+80e^{kt}.$$

We determine the coefficient k from the additional condition: at $t=20$, $\Theta=80$. Thus:

$$60=20+80e^{20k} \text{ or } e^{20k}=\frac{1}{2}\$$$

which leads to $e^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}$.

Final function: $\Theta=20+80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}$.

Problem 2. (Radioactive Decay). The rate of decay of radium at any moment is proportional to its present mass. Find the law of radium decay if it is known that at the initial moment t=0, there were m_0 grams of radium, and the half-life of radium is 1590 years.

Solution: Let x be the mass of radium at time t. Then the rate of decay is:

$$-\frac{dx}{dt}=kx$$

where k is the proportionality constant. Separating variables and integrating gives:

$$x=C\cdot e^{-kt}$$

Using the initial condition (at $t = 0$ m_0), we find $C = m_0$, so:

$x = m_0 \cdot e^{-kt}$

We find k using the half-life condition: at t=1590, $x = \frac{m_0}{2}$.

$\frac{m_0}{2} = m_0 \cdot e^{-1950k}$ or $e^{1950k} = 2$.

and therefore: $e^k = 2^{\frac{1}{1950}}$. Final function: $x = m_0 \cdot 2^{-t/1950}$.

REFERENCES

1. Bavrin I.I. *A Brief Course in Higher Mathematics for Chemical, Biological, and Medical Specialties.* – Moscow: FIZMATLIT, 2003.
2. Bugrov Y.S., Nikolsky S.M. *Differential and Integral Calculus.* – Moscow: Nauka, 1988.
3. Grossman S., Turner J. *Mathematics for Biologists.* – Moscow: Vysshaya Shkola, 1983.
4. Cornish-Bowden A. *Basic Mathematics for Biochemists.* – Moscow: Mir, 1983.
5. Mal Coad and others, *Mathematics for the international students*, Haese and Harris publocations, Australia, 2010.
6. К.Жамуратов, Д.Абдухалимов, «ПРОЕКТИВ ТЕКИСЛИК ВА ПРОЕКТИВ ТЕКИСЛИКНИНГ БИР ЖИНСЛИ КООРДИНАТАЛАРИ» Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». Выпуск №68-3 (том 2) (ноябрь, 2025), 334-344.
7. Жамуратов К., Умаров Х. Р., Холбоев С. Решение одной задачи теории фильтрации методом квазистационарного приближения. ГулДУ ахборотномаси, №2, 2016 йил, 9-13 бетлар.
8. Жамуратов, К., Умаров, Х. Р., & Турдимуродов, Э. М. (2024). *О решении методом регуляризации одной системы функциональных уравнений с дифференциальным оператором* (Doctoral dissertation, Белорусско-Российский университет)
9. Umarov, K. R. (2025). Methods For Construction Of The Zhegalkin Polynomial. *TLEP–International Journal of Multidiscipline*, *2*(5), 76-79.
10. Umarov, X., & Goyibnazarov, K. (2025, October). Some Principles Of Creative Training And Education Of Modern Youth. In *International Conference on Global Trends and Innovations in Multidisciplinary Research* (Vol. 1, No. 4, pp. 91-93).
11. Goyibnazarov, K., & Umarov, X. (2025, October). Biological Applications Of The Definite Integral. In *International Conference on Global Trends and Innovations in Multidisciplinary Research* (Vol. 1, No. 4, pp. 84-87).
12. Narjigitov, X., Umarov, X. R., & Kuchkarova, S. I. (2026). CHIZIQLI INTEGRAL TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI TARIXI HAQIDA. *SHOKH LIBRARY*, *1*(1).
13. Umarov X.R., Abduraximova D.D. "MATEMATIKADAN OLIMPIADA MASALALARINI YECHISHDA MATEMATIK ANALIZ METODLARIDAN FOYDALANISH" / Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №68 (том 2) (январь, 2025). Дата выхода в свет: 31.01.2025. с. 68-74.
14. Umarov X.R., Asqarbekova D.J. // "НАТУРАЛ СОНЛАР ҚАТОРИ ДАРАЖАЛАРИ ЙИҒИНДИСИНИ ТОПИШНИНГ БИР УСУЛИ" Международный научно-

практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №68 (том 2) (январь, 2025). Дата выхода в свет: 31.01.2025. с. 74-84.

15. Umarov X.R., Erkinov Sh.B. // “YIG‘INDI VA KO‘PAYTMALARNI HISOBLASHDA KOMPLEKS ANALIZ METODLARIDAN FOYDALANISH” Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №68 (том 2) (январь, 2025). с. 84-103.
16. Наржигитов Х., Умаров Х. «БИОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛ» “Raqamli texnologiyalar va sun’iy intellektni rivojlantirishning zamonaviy holati va istiqbollari” mavzusida ilmiy-amaliy anjumani materiallari to‘plami – Guliston, 2022 y.
17. Умаров Х.Р., Эгамбердиева С.Н. АЙРИМ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШДА ЧЕГИРМАЛАР НАЗАРИЯСИДАН ФОЙДАЛАНИШ. Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №78 (том 1) (ноябрь, 2025). стр, 161-177.
18. Umarov X.R., Abdurasulov O.U. O‘LCHOVLI FUNKSIYALAR FAZOSI UCHUN DUALLIK PRINSIPI Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №78 (том 1) (ноябрь, 2025). стр. 178-188.
19. Х.Умаров, З.Олимов. КЕТМА-КЕТЛИКЛАР l^p ФАЗОСИДАГИ ФУНКЦИОНАЛЛАРНИНГ УМУМИЙ КЎРИНИШИ. Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №78 (том 1) (ноябрь, 2025) Стр. 189-193.
20. Умаров Х.Р., Райимқулова К.Б. Турли N-функциялар аниқлаган Орлич фазоларини таққослаш. Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». Выпуск №68-3 (том 2) (ноябрь, 2025). стр. 482-487.
21. Умаров Х.Р., Маматкаримова М.И. КОШИ ТЕНГСИЗЛИГИ ВА УНИНГ ТАТБИҚЛАРИ. Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». Выпуск №68-3 (том 2) (ноябрь, 2025). с. 477-481.
22. X.Narjigitov, X.R.Umarov, S.I.Kuchkarova, & Worldly Knowledge Publishing Centre. (2026). CHIZIQLI INTEGRAL TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI TARIXI HAQIDA. B ILMIY TADQIQOTLAR VA ULARNING YECHIMLARI (T.9, Выпуск 01, cc. 219–223). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.18227815.

TARMOQLANUVCHI MARKOV JARAYONLARIDA ASIMPTOTIK XOSSALAR VA TUGASH EHTIMOLI

Muzaffar Madaminov Ma’rufjon o‘g‘li[1], Abdusamatova Xayitxon Ulug‘bek qizi[2]
[1,2]Qo‘qon davlat universiteti doktoranti
https://doi.org/10.5281/zenodo.20609906

Annotatsiya *Mazkur maqolada o‘zgaruvchan rejimli tarmoqlanuvchi Markov jarayonlarining asimptotik xossalari o‘rganiladi. Xususan, subkritik tarmoqlanuvchi jarayonlar uchun tugash ehtimolining limit xossalari, yashab qolish ehtimolining eksponensial kamayishi va shartli limit taqsimotning mavjudligi tahlil qilinadi.*
Kalit so‘zlar: *tarmoqlanuvchi jarayon, Markov jarayoni, subkritik jarayon, shartli limit taqsimot.*
Abstract. *This article investigates asymptotic properties of branching Markov processes with variable regimes. In particular, extinction probabilities, exponential decay of survival probabilities, and quasi-stationary distributions for subcritical branching processes are analyzed.*
Keywords: *branching process, Markov process, subcritical process, quasi-stationary distribution.*

Stoxastik jarayonlar nazariyasi zamonaviy matematikaning muhim yo‘nalishlaridan biridir. Tarmoqlanuvchi Markov jarayonlari biologiya, epidemiologiya, fizika va iqtisodiyotda murakkab tizimlarni modellashtirishda keng qo‘llaniladi.

Tarmoqlanuvchi jarayonlarning asosiy xususiyati shundan iboratki, har bir individ mustaqil ravishda ko‘payishi, o‘lishi hamda boshqa holatga o‘tishi mumkin.

Mazkur maqolada subkritik tarmoqlanuvchi jarayonlarning uzoq muddatli xatti-harakatlari o‘rganiladi.

Tarmoqlanuvchi Markov jarayonlari ξ(t) orqali belgilanadi va vaqtning t momentidagi populyatsiya sonini bildiradi.

Jarayon Markov xossasiga ega

$$P\{X(t+h)=j \mid X(t)=i, X(s), s<t\} = P\{X(t+h)=j \mid X(t)=i\}$$

Agar populyatsiyada k ta individ mavjud bo‘lsa, kichik Δt vaqt oralig‘ida individning

m ta individga aylanish ehtimoli:

$\pi_m(k)\Delta t + o(\Delta t)$

ko‘rinishda beriladi. Bu yerda

$$\pi_m(k) = \begin{cases} \pi_m, & m < N,\ m \neq 1 \\ \pi_m + \frac{z_m}{k}, & m \geq N \end{cases}$$

Natijalarini bayon qilish uchun $\xi(t)$ jarayoni bo‘yicha quyidagi belgilashlarni kiritamiz.

$$P_{ij}(t) = P\{\xi(t)=j \mid \xi(0)=i\},\ \varphi_k(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \pi_m(k) z^m$$

Jarayon uchun hosil qiluvchi funksiya ko‘rinishda aniqlanadi. Jarayon uchun ta’sir funksiyasi $\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \pi_m z^m$

$$f(z) = r_1 + \sum_{m=N+1}^{\infty} z^{m-1} r_m$$

ko‘rinishda yoziladi.

Kolmogorov differensial tenglamasi

$\frac{\partial \Phi(t,z)}{\partial t} = \varphi(z) \frac{\partial \Phi(t,z)}{\partial z}$ boshlang‘ich shart bilan

$\Phi(0, z) = z$

beriladi.

Keyingi o‘rinlarda quyidagi terminologiyadan foydalanamiz. π_m kattaliklarni ko‘payish intensivliklari, r_m kattaliklarni esa boshqaruv intensivliklari deb ataymiz.

Agar

$\varphi'(1) < 0$

bo‘lsa, jarayon subkritik deyiladi.

Bu holatda populyatsiya o‘rtacha hisobda kamayadi.

Teorema. Agar

$\varphi'(1) < 0, \qquad \varphi''(1) < \infty, \qquad |f'(1)| < \infty$

bo‘lsa, quyidagi natijalar o‘rinli bo‘ladi.

1. Tugash ehtimoli bo‘ladi.
2. Yashab qolish ehtimoli bo‘ladi. Bu yerda

$$\lim_{t \to \infty} P_{i0}(t) = 1$$

$$1 - P_{i0}(t) = k_i e^{\alpha t}(1 + o(1))$$

$\alpha < 0$, k_i boshlang‘ich i holatga bo‘gliq konstanta.

3. Shartli limit taqsimot

$$\lim_{t \to \infty} \frac{P_{ik}(t)}{1 - P_{i0}(t)} = p_k$$

Bu yerda ρ_k limit taqsimotni bildiradi.

Misol. Faraz qilaylik, har bir bakteriya 0.6 ehtimollik bilan vafot etsin, 0.4 ehtimollik bilan ikkiga bo‘linsin. U holda matematik kutilma bo‘lib

$$m = 0 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.4 = 0.8$$

$$m < 1$$

bo‘lgani uchun jarayon subkritik hisoblanadi. Demak

$$P_{i0}(t) \to 1$$

Agar bo‘lsa ko‘rinishda kamayadi.

$$\alpha = -0.3$$

$$1 - P_{i0}(t) \approx Ce^{-0.3t}$$

t	Yashab qolish ehtimoli
1	0.74
5	0.22
10	0.05
20	0.002

Table 1: Yashab qolish ehtimolining kamayishi

Olingan natijalar branching processlarning uzoq muddatli xatti-harakatlarini tushuntirishda muhim ahamiyatga ega. Subkritik jarayonlarda populyatsiya ehtimollik birga teng darajada yo‘qoladi.

Shartli limit taqsimot esa hali yo‘qolmagan populyatsiyalar ma’lum statistik qonuniyatga bo‘ysunishini ko‘rsatadi.

Mazkur maqolada subkritik tarmoqlanuvchi Markov jarayonlarining asosiy asimptotik xossalari o‘rganildi. Teorema yordamida yo‘qolish ehtimoli, yashab qolish ehtimolining eksponensial kamayishi va shartli limit taqsimot mavjudligi tahlil qilindi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Harris T.E. *The Theory of Branching Processes*. Springer, 1963.
2. Athreya K.B., Ney P.E. *Branching Processes*. Springer, 1972.
3. G. Francisci. *Branching Processes in Random Environments with Thresholds, Advances in Applied Probability*, 2024.
4. Ross S. *Stochastic Processes*. Wiley, 1996.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА В АНТРОПОМЕТРИИ

Тиллаева Зебо Ёрбековна
к.б.н., главный преподователь по биологии
Город Ташкент, 3-академический лицей
Ташкентского Государственного Медицинского Университета
https://doi.org/10.5281/zenodo.20609928

Annotatsiya. *Antropometriya usulini qo‘llash orqali odamning bo‘y uzunligi, qo‘llarini yoygandagi uzunligi va kaft hajmini hisoblab topish mumkin. Olingan o‘lchovlarning o‘rtacha qiymatini hisoblab topish mumkin.*
Kalit so‘zlar: *antropometriya, statistika*
Аннотация. *С помощью антропометрии можно изучать рост и размах руки и объем ладони. По полученным данным можно посчитать средний показатель.*
Ключевые слова: *антропометрия, статистика.*
Annotation. *With the help of anthropometry, you can study the height and span of the hand and the volume of the palm. Based obtained data, an average can be calculated.*
Key words: *anthropometry, statistics.*

Антропометрия – метод измерения человеческого тела и его частей. Антропометрия включает в себя определение веса человека, измерение длины тела, длины размаха, обхвата груди, талии, бедер. В редких случаях также измеряют основные показатели дыхания (спирометрия) и силу мышц.

1. Измерение роста – способ определения уровня развития человека в отношении эндокринной системы, выявление гигантизма и карликовости.

2. Измерение массы тела – определение веса исследуемого человека, определение дозы определенных лекарств, выявление ожирения и дефицита веса, профилактика во время беременности.

3. Определение обхвата грудной клетки и окружности головы – для расценки развития обследуемого в физическом плане, при обследовании пациентов пульмонологического и неврологического профиля.

4. Определение окружности живота – при наблюдении за беременными, при отёке в брюшной полости (асците).

5. Спирометрия – измерение ёмкости лёгких. Проходит в пульмонологической практике.

6. Динамометрия – измерение силы мышц. Проводится для оценки физического развития, в неврологической практике.

При изучение темы «Опорно-двигательная система, рост и развитие костей» мы проводили следующую лабораторную работу.

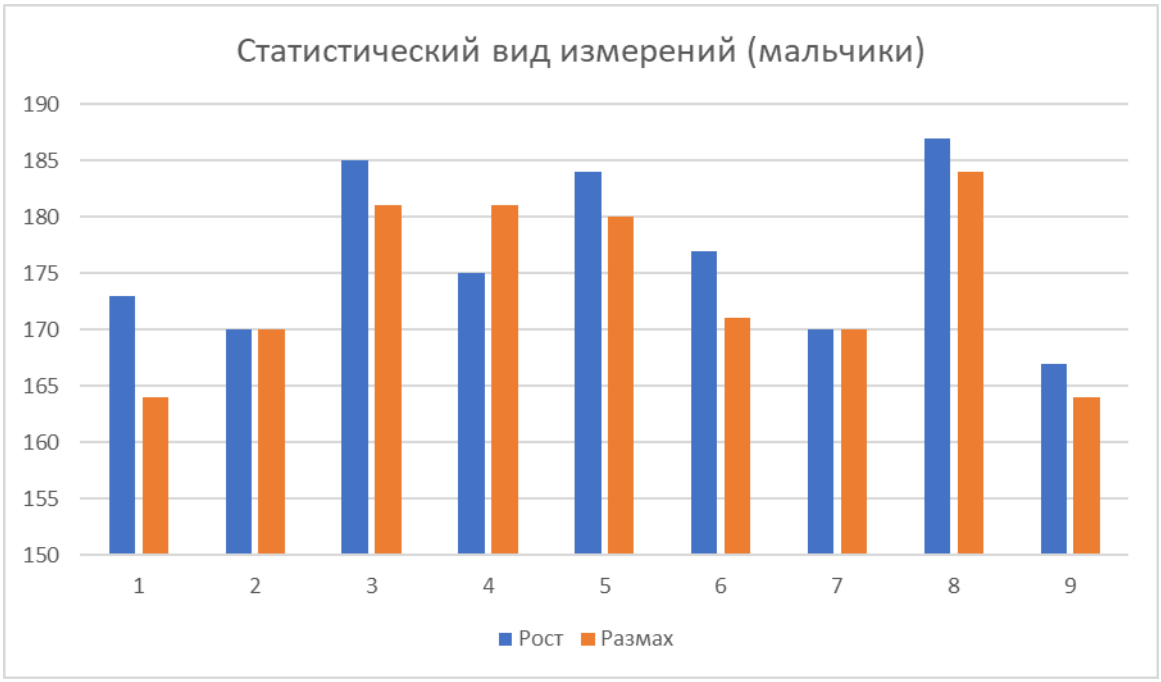
Необходимые принадлежности и оборудование: сантиметровая лента, ровная стена, разноцветные карандаши, ручки, тетрадь в клетку.

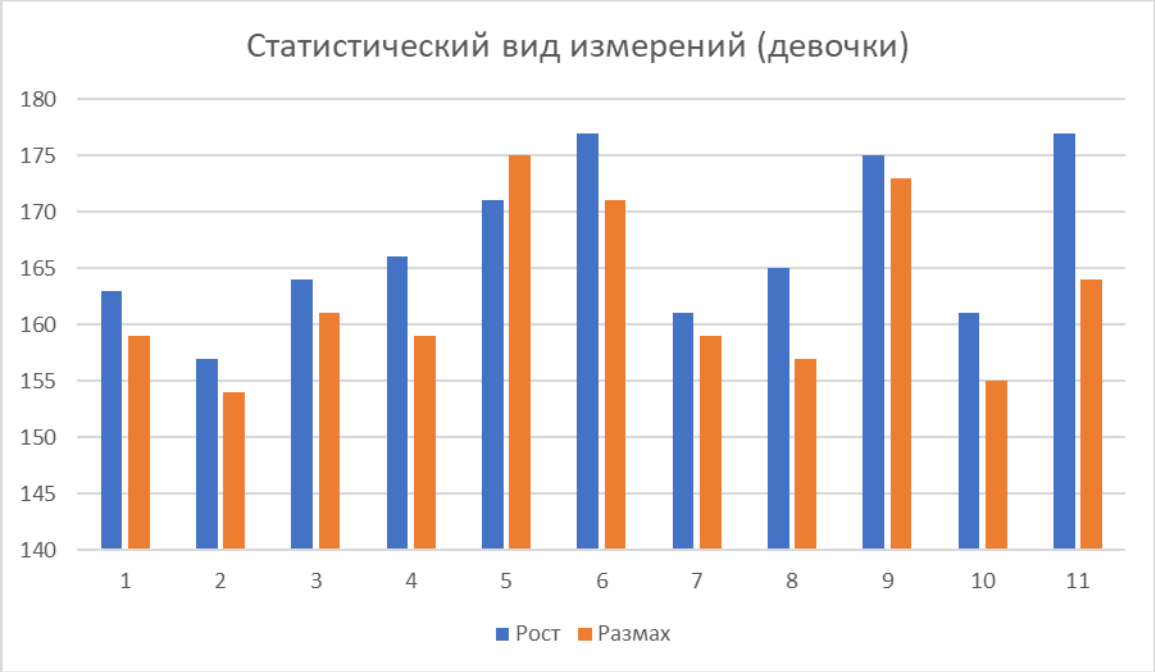
Ход работы: Один из учеников встает параллельно спиной к стене. Ученик должен держать ровную осанку и не поворачивать головой в стороны. Второй ученик измеряет рост первого сантиметровой лентой, делая это аккуратно и точно. Мерки записываются. Далее первый ученик расправляет руки, не нарушая осанки, держа их параллельно

плечам. Второй ученик так же измеряет размах рук первого, записывая мерки. Полученные данные оформили в виде таблиц.

Ученики	**Рост, см.**	**Размах, см.**
1.	163	159
2.	157	154
3.	164	161
4.	166	159
5.	171	175
6.	177	171
7.	161	159
8.	165	157
9.	175	173
10.	161	155
11.	173	164
12.	170	170
13.	185	181
14.	175	181
15.	184	180
16.	177	171
17.	170	170
18.	187	184
19.	167	164
Среднее значение, см.	171	169

По таблице составили график:



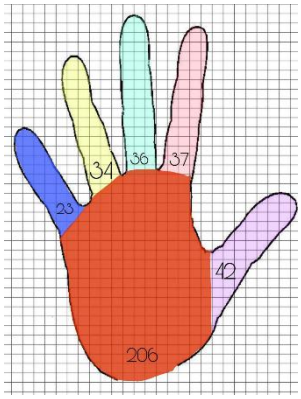


Из полученных графиков определили среднее значение роста и размаха нашей группы и сделали вывод.

Среднее значение роста **Среднее значение размаха**

У девочек составило 167 см У девочек составило 166 см

У мальчиков составило 176 см У мальчиков составило 176 см



В тетрадь копировали левую руку и посчитали клетки. Каждая клетка 1 см^2, считая клетки нашли объем ладони.

В данном случае 206+42+37+36+34+23=378 см^2.

Таким образом, используя математические расчеты можно изучать метод антропометрии в биологии, а также рост и развитие организма и среднее значение подростка. Этот процесс обучает учеников научной деятельности, каждой проблеме подходить с научной точки зрения.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Mary Jones and Geoff Jones. Cambridje IGCSE Biology coursbook. Third edition. Cembridge University Press 2014. 350 p.

2. О.Мавлянов, Т.Тилавов, Б.Аминов. Биология. 8-класс. Ташкент. «O‘qituvchi» NMIU, 2019. 192 с.

R_n VA P_n ALGEBRA HAQIDA

Aroyev Dilshod Davronovich[1], Zikirxo‘jayeva Sadoqat Oybekjon qizi[2]
[1]Qo‘qon davlat universiteti matematika kafedrasi dotsenti, PhD, dotsent,
[2]Qo‘qon davlat universiteti magistranti
https://doi.org/10.5281/zenodo.20609995

Annotatsiya. *Ushbu maqolada R_n va P_n fazoning algebra sifatida qaralishi, uning asosiy xossalari hamda halqa va algebra tuzilmasi bilan bog`liq nazariy masalalar yoritilgan. Ishda $R_n$ va $P_n$ fazosining vektor fazosi sifatidagi tuzilmasi bilan bir qatorda, unda amallar kiritish orqali hosil bo‘ladigan algebrik xossalar tahlil qilingan.Shuningdek, $R_n$ va $P_n$ halqa bo`lishi va bu halqaning algebralikka o`tish shartlari isbotlangan. Maqolada keltirilgan natijalar algebrik strukturalarni chuqurroq o`rganish, ularning matematik modellashtirishdagi o`rnini aniqlash hamda oily matematika ta’limida amaliy ahamiyat kasb etadi.*

Kalit so`zlar: *R_n va P_n fazosi, halqa, algebra, vektor fazo, komutativlik, assotsiativlik, distributivlik.*

Аннотация. *В данной статье рассматриваются пространства $R_н$ и $P_н$ как алгебраические структуры, изучаются их основные свойства, а также теоретические вопросы, связанные со структурой кольца и алгебры. В работе наряду со структурой пространств $R_н$ и $P_н$ как векторных пространств анализируются алгебраические свойства, возникающие при введении в них операций. Кроме того, доказываются условия, при которых пространства $R_н$ и $P_н$ образуют кольцо и переходят к структуре алгебры. Результаты, приведённые в статье, имеют важное значение для более глубокого изучения алгебраических структур, определения их роли в математическом моделировании, а также обладают практической значимостью в преподавании высшей математики.*

Ключевые слова: *пространство $R_н$, пространство $P_н$, кольцо, алгебра, векторное пространство, коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность.*

Abstract. This thesis discusses the structure of the R_n and P_n space as an algebra, its fundamental properties, and its connection with ring and algebraic structures. The work analyzes the R_n and P_n space not only as a vector space but also as an algebra obtained by introducing suitable operations. Furthermore, the conditions under which R_n and P_n becomes a ring and subsequently an algebra are proved. The results presented in this thesis contribute to a deeper understanding of algebraic structures, their role in mathematical modeling, and their practical significance in higher mathematics education.

Keywords: *R_n and P_n space, ring, algebra, vector space,camutativity, associavitiy, distributivity.*

KIRISH. Hozirgi zamon matematikasining muhim yo`nalishlaridan biri bu algebrik strukturalarni o`rganishdir. Algebraik tuzilmalar nafaqat sof matematik tadqiqotlarda ,balki fizika, informatika, muhandislik va iqtisodiyot kabi sohalarda ham keng qo`llaniladi. Shu jihattan $R_n$ fazosini algebra sifatida o`rganish, undagi amallarni aniqlash va ularning xossalarini tahlil qilish muhim nazariy va amaliy ahamiyat kasb etadi. Mazkur ishda R_n fazosining algebraik tuzilmasi ya’ni, unda kiritilgan qo`shish va ko`paytirish amallari orqali hosil bo`ladigan halqa va

algebra xossalari tahlil qilinadi. Ayniqsa, bu fazoda amallarni bajarish jarayonida kamutativlik, assotsiativlik va distributivlik xossalarining bajarilishi alohida o`rganiladi.

***Tadqiqotning* maqsadi**: R_n va P_n fazosining algebraik xususiyatlarini aniqlash, uning halqa va algebra sifatidagi tuzilishini asoslash hamda tegishli isbotlarni keltirishdan iborat.

R_n va P_n algebralar haqida.

Ma’lumki, assotsiativ halqalar bilan birga noassotsiativ halqalar, noaasotsiativ algebralar ham o‘rganiladi. Ushbu maqolada ana shunday noassotsiativ halqalarning bir sinfi malum bir usullar bilan quriladi. Bunday algebraning qurilishi uning strukturalari hamda ideallari o‘rganishga zamin bo‘ladi.

R -haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsa,

$$\underbrace{R\times R\times ...\times R}_{n\ ma}$$

to‘plami R_n ko‘rinishda belgilab olamiz va bu to‘plamning ixtiyoriy elementini

$x=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ bunda $x_i\in R\ i=\overline{1,n}$

ko‘rinishda bo‘lishini bilamiz. x elementni analitik geometriya kursidan n ta koordinatali vektor sifatida qarashimiz mumkin. Umuman R_n to‘plamni n ta koordinatali vektorlar to‘plami sifatida qarashimiz mumkin. Demak, n ta koordinatali vektorlar to‘plamining halqa tashkil etishini ko‘rsatish mumkin.

Bu to‘plamning R haqiqiy sonlar maydoni ustida n o‘lchovli chiziqli fazo tashkil etishini ham isbotlash mumkin. Uning uchun chiziqli fazo bo‘lish shartlarini eslab o‘taylik.

I. Qo‘shish amalining kommutativligi:

II. Qo‘shish amalining assotsiativligi:

III. Nol element mavjudligi:

IV.Ixtiyoriy element uchun qarama qarshi element mavjudligi va uning yagonaligi:

Bizga koordinatalari haqiqiy sonlardan iborat n o‘lchovli vektorlar to‘plami - R_n va uning ixtiyoriy

$x=\{x_1,x_2,...,x_n\}$

$y=\{y_1,y_2,...,y_n\}$

$z=\{z_1,z_2,...,z_n\}$

Elementlari berilgan bo‘lsin.

I. Qo‘shish amalining kommutativligi:

$x+y=y+x$

II. Qo‘shish amalining assotsiativligi:

$x+(y+z)=(x+y)+z$

III. Nol element mavjud:

$x+0=x$

IV. Ixtiyoriy element uchun qarama-qarshi element mavjud, ixtiyoriy element uchun qarama-qarshi element vazifasini har bir vektorga mos koordinatalari qarama-qarshi sonlardan tashkil topgan qarama-qarshi vektor bajaradi va u yagona.[1]

Demak, R_n to‘plam haqiqiy sonlar maydoni ustida chiziqli fazo tashkil qilar ekan va uning

$e_1 = \{1,0,\ldots,0\}$

$e_2 = \{0,1,\ldots,0\}$

…

$e_n = \{0,0,\ldots,1\}$

ko‘rinishdagi bazi sinf arifmetik bazis deb ataymiz. Bizga analitik geometriya kursidan ma’lumki R_n fazoning ixtiyoriy vektorini bazis vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida yagona tarzda ifodalash mumkin.

R_n halqaning analogi sifatida P_n halqani ham qurish mumkin. Buning uchun

$$\underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n\ ma}$$

Belgilash asosida xuddi R_n dagidek amallarni aniqlash va P_n to‘plamning bu amallarga nisbatan P maydon ustida algebra bo‘lishini ko‘rsatish mumkin. P_n to‘plam P maydon ustida chiziqli fazo tashkil etadi. Buni ham haqiqiy sonlar maydoni ustidagi kabi tekshiriladi, faqat bunda birlik element sifatida e olinadi, chunki haqiqiy sonlar maydonida birlik element 1 soni bo‘lsa, P maydonda esa birlik elementi e deb belgilagan edik. Shuning uchun P_n algebraning arifmetik bazisi

$e_1 = \{1,0,\ldots,0\}$

$e_2 = \{0,1,\ldots,0\}$

$e_n = \{0,0,\ldots,1\}$

ko‘rinishida bo‘ladi va bu yerda e element P maydonning birlik elementi.

R_n va P_n fazolarning o‘xshashlik tomonlari ko‘p, lekin R va P maydon izomorf bo‘lmagan holda R_n va P_n fazolar bir biridan farq qiladi. Hattoki R_n cheksiz, P_n esa chekli to‘plam ham bo‘lishi mumkin.

Masalan P maydon sifatida Q - ratsional sonlar maydonini P_n sifatida P_2 va P_3 larni olaylik. P cheksiz P_2 esachekli, masalan $P_2 = \{0,1\}$ ni olaylik,

$P_2 = \{0,0\}$

$P_2 = \{0,1\}$

$P_2 = \{1,0\}$

$P_2 = \{1,1\}$

ko‘rinib turibdiki P cheksiz P_2 esa chekli, ya’ni 4ta elementdan iborat.[2]

Endi P_3 ni ko‘raylik. $R_3=\{0,1,2\}$ bo‘lsin.

1. $P_3 = \{0,0,0\}$
2. $P_3 = \{0,0,1\}$
3. $P_3 = \{0,1,0\}$
4. $P_3 = \{1,0,0\}$
10. $P_3 = \{2,0,0\}$
11. $P_3 = \{0,2,2\}$
12. $P_3 = \{2,0,2\}$
13. $P_3 = \{2,2,0\}$
19. $P_3 = \{2,2,1\}$
20. $P_3 = \{2,2,2\}$
21. $P_3 = \{1,0,2\}$
22. $P_3 = \{1,2,0\}$

5. $P_3 = \{0,1,1\}$ 14. $P_3 = \{1,1,2\}$ 23. $P_3 = \{2,1,0\}$
6. $P_3 = \{1,0,1\}$ 15. $P_3 = \{1,2,1\}$ 24. $P_3 = \{2,0,1\}$
7. $P_3 = \{1,1,0\}$ 16. $P_3 = \{2,1,1\}$ 25. $P_3 = \{0,2,1\}$
8. $P_3 = \{0,0,2\}$ 17. $P_3 = \{1,2,2\}$ 26. $P_3 = \{0,1,2\}$
9. $P_3 = \{0,2,0\}$ 18. $P_3 = \{2,1,2\}$ 27. $P_3 = \{1,1,1\}$

P_3 to‘plam 27ta elementdan iborat bo‘ldi.

Eng muhimi bu emas, eng muhimi R_n fazo R maydon ustida P_n fazo P maydon ustida algebra tashkil qiladi.

R_n fazoning R haqiqiy sonlar maydonni ustida algebra tashkil qilishini tekshirib ko‘raylik. Koordinatalari haqiqiy sonlardan iborat n o‘lchovli vektorlar to‘plami va uning ixtiyoriy

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$
$$y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$
$$z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$$

Vektorlari berilgan bo‘lsin.

I. Qo‘shish amali kommutativ:

$$x + y = y + x$$

II. Qo‘shish amali assotsiativ:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

III. Ko‘paytirish amali kommutativ:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

IV. Ko‘paytirish amali assotsiativ:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

V. Qo‘shish va ko‘paytirish amallarining distributivlik qonuni bilan bog‘langanligi:

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

VI. Nol elementning mavjudligi:

Bunda ham nol element vazifasini nol vektor bajaradi.[3]

$$x + 0 = x$$

Ixtiyoriy element uchun qarama-qarshi element mavjud, ixtiyoriy element uchun qarama-qarshi element vazifasini har bir vektorga mos koordinatalari qarama-qarshi sonlardan tashkil topgan qarama-qarshi vektor bajaradi va u yagona.

VII. Birlik elementning mavjudligi:

Birlik element vazifasini koordinatalari 1 bo‘lgan

$$1 = \{1,1,\ldots,1\}$$

vektor bajaradi.

VIII. Ixtiyoriy $\lambda, \mu \in R$ uchun,

1. $\lambda \cdot (x \cdot y) = x \cdot (\lambda \cdot y) = (\lambda \cdot x) \cdot y$
2. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda x + \lambda y$

3. $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda x+\mu x$

Ko‘rinib turibdiki R_n fazo R_n algebra tashkil qilar ekan.

Umumiy holda P maydon ustida P_n to‘plamning algebra tashkil qilishini tekshiraylik.

Bizga elementlari P maydonga tegishli P_n to‘plam va uning

$a=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$

$b=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$

$c=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$

I. Qo‘shish amali kommutativ:

$a+b=b+a$

II. Qo‘shish amali assotsiativ:

$a+(b+c)=(a+b)+c$

III. Ko‘paytirish amali kommutativ:

$a\cdot b=b\cdot a$

IV. Ko‘paytirish amali assotsiativ:

$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

V. Qo‘shish va ko‘paytirish amallarining distributivlik qonuni bilan bog‘langanligi:

$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

VI. Nol elementning mavjudligi:

Bunda ham nol element vazifasini koordinatalari P maydonning nol elementidan tashkil topgan P_n ning nol vektori bajaradi:

$0=\{0,0,\ldots,0\}$

$a+0=a$

VII. Ixtiyoriy element uchun qarama-qarshi element mavjud:

Ixtiyoriy vektorga qarama-qarshi vektor, mos koordinatalari P maydonning qarama-qarshi elementlaridan tashkil topgan vektor bo‘ladi va u yagona:

$-a=\{-a_1,\ -a_2,\ldots,a_n\}$

$a+(-a)=0$

VIII. Birlik elementning mavjudligi:

Birlik element vazifasini koordinatalari P maydonning birlik elementidan tashkil topgan vektor bajaradi:

$e=\{e,e,\ldots,e\}$

IX. Ixtiyoriy $\lambda,\mu\in P$ uchun,

1. $\lambda\cdot(a\cdot b)=a\cdot(\lambda\cdot b)=(\lambda\cdot a)\cdot b$

2. $\lambda\cdot(a+b)=\lambda a+\lambda b$

3. $(\lambda+\mu)\cdot a=\lambda a+\mu a$

Ko‘rinib turibdiki P_n to‘plam P maydon ustida algebra tashkil qilar ekan. Shuni esdan chiqarmaslik kerakki, P_n algebrani faqatgina, P maydon assotsiativ va kommutativ

bo‘lgandagina qurish mumkin. Bunga juda ko‘p misollar keltirish mumkin. Quyidagi misollarni isboti bilan keltiramiz.

1. Haqiqiysonlarmaydonio‘ziustidaalgebratashkilqiladi.

Haqiqatdan,

I. Qo‘shish amali kommutativ:

Haqiqatdan ham, $\forall a,b \in R$ uchun,

$a+b=b+a$

II. Qo‘shish amali assotsiativ:

$\forall a,b,c \in R$ lar uchun

$a+(b+c)=(a+b)+c$

III. Ko‘paytirish amali kommutativ:

$\forall a,b \in R$ uchun,

$a \cdot b = b \cdot a$

IV. Ko‘paytirish amali assotsiativ:

$\forall a,b,c \in R$ lar uchun

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

V. Qo‘shish va ko‘paytirish amallarining distributivlik qonuni bilan bog‘langanligi:

$\forall a,b,c \in R$ lar uchun

$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

VI. Nol elementning mavjudligi:

Bunda nol element vazifasini haqiqiy sonlar maydonida 0 soni bajaradi. $\forall a \in R$

$a+0=a$

VII. Ixtiyoriy haqiqiy son uchun qarama-qarshi element mavjudligi:

$\forall a \in R$ uchun $\exists -a \in R$

$a+(-a)=0$

VIII. Birlik elementning mavjudligi:

Birlik element vazifasini haqiqiy sonlar maydonida 1 soni bajaradi. $\forall a \in R$ uchun,

$a \cdot 1 = a$

IX. Ixtiyoriy $\forall \lambda, \mu \in R$ va $\forall a,b \in R$ uchun,

1. $\lambda \cdot (a \cdot b) = a \cdot (\lambda \cdot b) = (\lambda \cdot a) \cdot b$

2. $\lambda \cdot (a+b) = \lambda a + \lambda b$

3. $(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda a + \mu a$

Ko‘rinib turibdiki, keltirgan misolimiz algebra tashkil qilishning barcha shartlarini bajarar ekan, demak haqiqiy sonlar maydoni o‘zi ustida algebra tashkil qilar ekan.[4]

2. Haqiqiy sonlar maydoni ratsional sonlar maydoni ustida algebra tashkil qiladi.

Haqiqatdan,

I. Qo‘shish amali kommutativ:

Haqiqatdan ham, $\forall a,b \in R$ uchun,

$a+b=b+a$

II. Qo‘shish amali assotsiativ:

$\forall a,b,c \in R$ lar uchun

$a+(b+c)=(a+b)+c$

III. Ko‘paytirish amali kommutativ:

$\forall a,b \in R$ uchun,

$a \cdot b = b \cdot a$

IV. Ko‘paytirish amali assotsiativ:

$\forall a,b,c \in R$ lar uchun

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

V. Qo‘shish va ko‘paytirish amallarining distributivlik qonuni bilan bog‘langanligi:

$\forall a,b,c \in R$ lar uchun

$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

VI. Nol elementning mavjudligi:

Bunda nol element vazifasini haqiqiy sonlar maydonida 0 soni bajaradi. $\forall a \in R$

$a+0=a$

VII. Ixtiyoriy haqiqiy son uchun qarama-qarshi element mavjudligi:

$\forall a \in R$ uchun $\exists -a \in R$

$a+(-a)=0$

VIII. Birlik elementning mavjudligi:

Birlik element vazifasini haqiqiy sonlar maydonida 1 soni bajaradi. $\forall a \in R$ uchun,

$a \cdot 1 = a$

IX. Ixtiyoriy $\forall \lambda, \mu \in Q$ va $\forall a,b \in R$ uchun,

1. $\lambda \cdot (a \cdot b) = a \cdot (\lambda \cdot b) = (\lambda \cdot a) \cdot b$
2. $\lambda \cdot (a+b) = \lambda a + \lambda b$
3. $(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda a + \mu a$

Ko‘rinib turibdiki, keltirgan misolimiz algebra tashkil qilishning barcha shartlarini bajarar ekan, demak haqiqiy sonlar maydoni ratsional sonlar maydoni ustida algebra tashkil qilar ekan.[5]

XULOSA. Yuqoridagi natijalardan ko`rinib turibdiki , keltirgan misolimiz algebra tashkil qilishning barcha shartlarini bajarar ekan, demak haqiqiy sonlar maydoni ratsional sonlar maydoni ustida algebra tashkil qilar ekan.

Shuni xulosa qilish mumkinki bizga ixtiyoriy A va B to`plamlar berilgan bo`lsa A to`plam B to`plam ustida algebra tashkil qilishi uchun ikki to`plam ham assotsiativ, kommutativ, birlik element va nol element mavjud bo`lishi hamda B to`plam A to`plamga teng yoki uning qism to`plami bo`lishi kerak ekan .

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. А.Г.Курош « Курс высшей алгебры» Наука, М. 1975.
2. С.Н. Насиров «Описании идеалов одного класса неассоциативных алгебр» Научные труды ТашГУ, вып 418. 1972,232-236.
3. С.Н. Насиров «Об идеалах одного класса конечномерных неассоциативных алгебр» Научные труды ТашГУ, вып 461. 1974,86-89.

KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANING HOSILALARI

G‘ofurova Mavjuda Aliyevna[1], Muxtorova Feruza[2]
[1]Qo‘qon davlat universiteti, Aniq fanlar va muhandislik fakulteti
Matematika kafedrasi kata o‘qituvchisi,
[2]1-kurs talabasi
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610018

Annotatsiya. *Ushbu maqolada ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar hosilalari nazariyasining fundamental asoslari, xususan, funksiyaning xususiy hosilalari, yo‘nalish bo‘yicha hosila va to‘la defferensial tushunchalari tizimli ravishda yoritiladi. Maqolada bir o‘zgaruvchili funksiya hosilasi bilan ko‘p o‘zgaruvchili funksiya hosilalari o‘rtasidagi o‘xshashlik va jiddiy farqlar qiyosiy tahlil qilinadi.*

Kalit so‘zlar: *Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya, xususiy hosila, to‘la differensial, gradient, yo‘nalish bo‘yicha hosila,*

Mavzuning dolzarbligi. Zamonaviy ilm-fanning barcha sohalarida, xususan, fizika, muhandislik, iqtisodiyot va ma’lumotlar tahlili (Data Science) sohalarida o‘rganilayotgan ob’ektlar ko‘pincha bitta emas, balki bir nechta omillarga bog‘liq bo‘ladi. Masalan, havoning bosimi nafaqat vaqtga, balki geografik kenglik, uzunlik va balandlikka ham bog‘liq. Bunday murakkab bog‘liqliklarni matematik tilda ifodalash uchun ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar tushunchasi qo‘llaniladi. Ushbu funksiyalarning o‘zgarish dinamikasini, ya’ni bir o‘zgaruvchi o‘zgarganda umumiy natija qanday o‘zgarishini o‘rganishda xususiy hosilalar va differensiallar tushunchasi markaziy o‘rinni egallaydi.

Bir o‘zgaruvchili funksiya hosilasi tushunchasi fanga kiritilgandan so‘ng, uning mantiqiy davomi sifatida ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarni tahlil qilish zarurati tug‘ilgan. G.Leybnis va I.Nyuton asarlarida boshlangan bu izlanishlar keyinchalik L.Eyler va J.Lagranj tomonidan mukammallashtirildi. Biroq, ko‘p o‘zgaruvchili holatda "hosila" tushunchasi vektor ko‘rinishini olishi va differensiallanuvchanlik shartlarining murakkablashishi ushbu mavzuni doimiy o‘rganish va chuqur tahlil qilishni talab etadi.

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya hosilasi matematik tahlilning eng fundamental va markaziy tushunchalaridan biri bo‘lib, u funksiyalarning miqdoriy jihatdan tavsiflash imkonini beradi. Bu tushuncha yuqorida aytganimizdek Nyuton va Lyebnis davridan boshlab fan va texnikaning rivojlanishida hal qiluvchi rol o‘ynashiga asos bo‘lgan . Bu nafaqat sof matematik muammolarni hal qilishda, balki fizika, muhandislik, iqtisodiyot, biologiya va boshqa ko‘plab sohalarda dinamik jarayonlarni modellashtirish va tahlil qilishda ajralmas vosita hisoblanadi [1]. Uning yordamida harakat qonunlari, o‘sish suratlari, optimallashtirish masalalari kabi hodisalarni o‘rganish mumkin.

Ushbu maqola ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning hosilasini chuqur tahlil qilishga va bilimlarimizni mustahkamlashga bag‘ishlanadi.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning hosilasi matematik tahlilning asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Uning chuqur anglanilishi nafaqat nazariy matematikani o‘zlashtirish, balki real dunyo muommolarini hal qilishga yordam beradigan hosilaning bo‘limi ham muhim ahamiyat kasb etadi. So‘ngi yillarda ushbu mavzu bo‘yicha olib borilgan tadqiqotlar mavzuning turli

talqinlarini yanada kengroq va chuqurroq o‘rganishga qaratilgan bo‘lib, ular asosan pedagogik yondashuvlar, amaliy ilovalar va tushunchalarni vizuallashtirish usullarini takomillashtirishga e’tibor qaratmoqda.

Mavzuga bog‘liq holda hosila haqidagi manbalarda masalan 2020-yildan keying adabiyotlarda, dinamik geometriya dasturlari va kompyuter grafikasi vositalaridan foydalangan holda hosilaning geometrik ma’nosini o‘qitish metodikasi eng ko‘p muhokama qilinmoqda. Bu yondashuvlar talabalarning shu qatorda o‘quvchilarning mavhum tushunchalarni konkretlashtirishiga va funksiya grafigining egilish yo‘nalishi, o‘sish yoki kamayish tezligi kabi xususiyatlarini aniqroq tasavvur qilishga yordam beradi. Shu o‘rinda ba’zi tadqiqotlar aynan, ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar uchun hosilaning geometrik talqinini, ya’ni gradient vektorining yo‘nalishini va uning sirtga normal bo‘lishini vizuallashtirish usulllarini o‘rganadi, bu esa optimallashtirish masalalarida muhim rol o‘ynaydi [2] .

Zamonaviy ilm-fan va texnikada o‘rganilayotgan jarayonlarning ko‘pchiligi ko‘p faktorli xarakterga ega. Bir o‘zgaruvchili funksiyalar modelidan ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar modeliga o‘tish real dunyoni aniqroq tasvirlash imkonini beradi. Masalan, iqtisodiy barqarorlik, ob-havo prognozi yoki muhandislik konstruktsiyalarining chidamliligi o‘nlab, hatto minglab o‘zgaruvchilarga bog‘liq. Ushbu o‘zgaruvchilarning har biri umumiy tizimga qanday ta’sir ko‘rsatishini aniqlashda ko‘p o‘zgaruvchili funksiya hosilalari fundamental vosita bo‘lib xizmat qiladi. Tadqiqotning maqsadi ushbu matematik apparatning ichki mantiqiy bog‘liqliklarini yoritish va uning amaliy ahamiyatini asoslashdir

Tadqiqot metodalogiyasi

Mavzuning nazariy poydevori G.M. Fixtengolsning klassik asarlarida xususiy hosilalarning limit ko‘rinishidagi qat’iy ta’riflari bilan mustahkamlangan [3]. V.A. Zorich esa o‘z tahlillarida ko‘p o‘zgaruvchili hosilalarni akslantirishlar orqali chiziqli operator ko‘rinishida talqin etishni taklif etgan. O‘zbekiston matematika maktabi namoyandalari T. Azlarov va H. Mansurovlar ushbu tushunchalarni skalyar va vektor maydonlari nazariyasi bilan bog‘lab, amaliy yo‘nalishga yo‘naltirganlar. Zamonaviy xalqaro adabiyotlarda (J. Stewart) esa hosilalarning vizual-geometrik talqini va kompyuter modellashtirishidagi o‘rniga katta urg‘u berilgan. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya hosilalarini bir necha darajada tahlil qilish mumkin:

Xususiy hosila: Bu tushuncha funksiyaning faqat bitta tanlangan o‘zgaruvchi bo‘yicha o‘zgarish tezligini ko‘rsatadi. Fixtengols ta’kidlaganidek, xususiy hosilalarning mavjudligi funksiyaning uzluksiz bo‘lishi uchun yetarli emas, bu esa ko‘p o‘zgaruvchili fazoning murakkab topologiyasidan dalolat beradi.

To‘la differensial: Funksiyaning barcha o‘zgaruvchilari bo‘yicha lokal chiziqli yaqinlashishini ifodalaydi. To‘la differensialning mavjudligi xususiy hosilalarning nafaqat mavjudligi, balki ularning uzluksiz bo‘lishini ham taqozo etadi (Zorich tahlili).

Aralash hosilalar: Shvars teoremasiga ko‘ra, uzluksiz ikkinchi tartibli hosilalar uchun differensiallash tartibi ahamiyatga ega emas. Bu tabiatdagi ko‘plab jarayonlarning simmetrikligini matematik isbotidir.

Wikipediya ma’lumotlarida:

Matematikada , nuqtadagi funksiyaning **hosilasi** nuqtaga yaqin funksiyaga eng yaxshi affin yaqinlashuvining chiziqli qismidir. Bir o‘zgaruvchili hisoblashda bu tangens chiziqli yaqinlashuvdir . Ko‘p o‘zgaruvchili hisoblashda xuddi shu xususiyat vektor qiymatli funksiya yoki vektor argumentining funksiyasining hosilasini aniqlash uchun umumlashtiriladi. Ba'zan umumiy hosila deb ataladi , **qisman** hosilalardan farqli o‘laroq , hosila funksiyani faqat bitta

argumentga emas, balki barcha argumentlariga nisbatan yaqinlashtiradi [4]. Ko‘pgina hollarda, bu barcha qisman hosilalarni bir vaqtning o‘zida ko‘rib chiqish bilan bir xil deyiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. **Azlarov, T., & Mansurov, H. (1994).** *Matematik analiz* (1-qism). Toshkent: "O‘qituvchi". (O‘zbekistondagi asosiy o‘quv qo‘llanma).
2. Abdullayeva N. U., Mardonov M. M., Xolmatova N. A. Matematika o‘qitish metodikasi. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2022. – 320 b. – https://www.ziyonet.uz/
3. Fixtengols G.M. "Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya", 1-tom.
4. ^Rudin 1976, 213-bet

$R(M^{2,-1},2)$ LEYBNITS ALGEBRASINING DIFFERENSIALLASHI VA TO‘LIQLIGI

Mamadaliyev O‘ktamjon Xasanboyevich[1], Kamoldinova Malikaxon Muslimjon qizi[2]
[1]Namangan Davlat Universiteti PhD,dotsenti,
[2]Namangan Davlat Universiteti Matematika fakulteti
1-bosqich magistratura talabasi
https://doi.org/ 10.5281/zenodo.20610046

Annotatsiya. *Ushbu maqolada* $R(M^{-2,1},2)$ *differensiallashi va to‘liqligi tekshirilgan*
Kalit so‘zlar: *nilpotent, differensiallash, yechiluvchanlik, ideal, markaz*

Ta’rif 1. F maydon ustida aniqlangan G algebraning ixtiyoriy *x*, *y*, z elementlari uchun quyidagi ayniyatlar bajarilsa,

$[x, x] = 0$ – antikommutativlik ayniyati,

$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ – Yakobi ayniyati

G algebra Li algebrasi deyiladi, bu yerda [-,-] – G algebrada aniqlangan ko‘paytirish amali.

Ta’rif 2. maydon ustida aniqlangan L algebraning ixtiyoriy x, y, z elementlari uchun quyidagi Leybnis ayniyati bajarilsa

$$[x,[y,z]]=[[x,y],z]-[[x,z],y],$$

L algebra Leybnist algebrasi deyiladi, bu yerda [-,-] – L da aniqlangan ko‘paytirish amali.

Ixtiyoriy L Leybnist algebrasi uchun quyidagi quyi markaziy va hosilaviy ketma-ketliklarni mos ravishda aniqlaymiz:

$L^1 = L$, $L^{k+1} = [L^k, L^1]$; $L^{[1]} = L$, $L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}]$, k≥1.

Ta’rif 3. L Leybnist algebrasi uchun shunday $s \in \mathrm{N}$ son mavjud bo‘lib , $L^{[s]} = 0$ (mos ravishda , $L^s = 0$) bo‘la, u holda L yechiluvchan (mos ravishda, nilpotent) Leybnist algebrasi deyiladi.

Ixtiyoriy Leybnist algebrasining maksimal nilpotent ideali uning nilradikali deyiladi.

Таьrif 4. Aytaylik L – *n* -o‘lchamli Leybnist algebrasi bo‘lsin. Agar uning nilindeksi *n*-1 ga teng bo‘lsa, u holda L kvazi-filiform Leybnist algebrasi deyiladi.

Aytaylik *L* – nolga teng bo‘lmagan fazolarning chekli soni bilan Z- graduirlangan Leybnist algebrasi, ya’ni $L=\bigoplus_{i\in Z} V_i$ bo‘lsin, bu yerda har qanday i, j∈Z lar uchun $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$.

L nilpotent Leybnist algebrasi, agar $L=V_{k_1}\oplus V_{k_2}\oplus \dots \oplus V_{k_t}$ bo‘lsa, bu yerda barcha i ($k_1\le i \le k_t$) lar uchun $V_i\neq 0$, bog‘langan graduirovkani qabul qiladi deymiz.

len($\oplus L$)=k_t–k_1+1 soni graduirovkaning uzunligi deyiladi. Keyinchalik, *l*(*L*)=max{*len*($\oplus L$)=k_t–k_1+1 | $L=V_{k_1}\oplus V_{k_2}\oplus \dots \oplus V_{k_t}$ bog‘langan graduirovka} ni *L Leybnist algebrasining uzunligi* deb ataymiz.

Ta’rif 5. *L Leybnist algebrasi*, agar $l(L)=\dim L$ bo‘lsa, *maksimal uzunlikdagi algebra* deyiladi.

Teorema[2]. Maksimal uzunlikdagi har qanday *n-o‘lchamli* ($n\geq 6$) kvazi-filiform Li bo‘lmagan Leybnist algebrasi quyidagi o‘zaro izomorf bo‘lmagan algebra oilalaridan biriga izomorfdir:

$$M^{1,\delta}:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_n, & [e_{n-1},e_1]=e_2,\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq n-3,\\ [e_{n-1},e_{n-1}]=\delta e_4,\ \delta\in\{0,1\}, & [e_i,e_{n-1}]=\delta e_{3+i}, & 2\leq i\leq n-5;\end{cases}$$

Bu yerda $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ algebraning bazisi .

Ta’rif 6. Aytaylik d – L Leybnist algebrasining chiziqli almashtirishi bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $x, y \in L$ lar uchun quyidagi tenglik bajrilsa

$$d([x, y])=[d(x), y]+[x, d(y)],$$

u holda d chiziqli almashtirishga *L Leybnist algebrasining differensiallashi* deyiladi.

Ta’kidlab o‘tamizki, algebra elementiga o‘ngdan ko‘paytirish operatorlari (ya’ni, algebraning har qanday y elementi uchun $\mathcal{R}_x(y) = [x,y]$) differensiallash bo‘ladi, biz ularni ichki differensiallashlar deb ataymiz.

Ta’rif 7. *L*- Leybnist algebrasi bo‘lsin, $Center(L) = \{x \in L | [x, L] = [L, x] = 0\}$ L ga algebraning markazi deyiladi..

Ta’rif 8. L Leybnist algebrasi to‘liq deyiladi, agar uning markazi nol(trivial) va har qanday differensiallashi ichki bo‘lsa.

Teorma[1]. R–nilradikali $M^{-2,1}$va $dimQ = 2$ ga teng bo‘lgan yechiluvchan Leybnist algebrasi bo‘lsin, u holda R quyidagi algebraga izomorf bo‘ladi:

$$R(M^{-2,1},2):\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1} & 1\leq i\leq n-3,\\ [e_i,x_1]=ie_i, & 1\leq i\leq n-2,\\ [e_n,x_1]=-[x_1,e_n]=e_n, & [x_1,e_1]=-e_1,\\ [e_{n-1},x_2]=-[x_2,e_{n-1}]=e_{n-1},\\ [e_n,x_2]=-[x_2,e_n]=e_n\\ [e_{n-1},e_1]=e_n,\\ [e_1,e_{n-1}]=-e_n\end{cases}$$

Biz $R(M^{-2,1},2)$ algebrani differensiallashlarini xisoblab quyidagi tasdiqni olishimiz mumkin..

Tasdiq 4. $R(M^{-2,1},2)$ algebraning ixtiyoriy differensiallashi quyidagicha matrisaviy ko‘rinishga ega:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n} & 0 & 0 \\ 0 & 2a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_{1,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1}+a_{1,1} & 0 & 0 \\ -a_{1,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{1,n} & b_{1,n} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Исботи: $d - R(M^{-2,1}, 2)$ algebraning differensiallashi bo‘lsin.

$$d(e_1) = \sum_{i=1}^{n} a_{1,i}e_i + a_{1,n+1}x_1 + a_{1,n+2}x_2,$$

$$d(e_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_{2,i}e_i + a_{2,n+1}x_1 + a_{2,n+2}x_2,$$

$$d(x_1) = \sum_{i=1}^{n} b_{1,i}e_i + b_{1,n+1}x_1 + b_{1,n+2}x_2,$$

$$d(x_2) = \sum_{i=1}^{n} b_{2,i}e_i + b_{2,n+1}x_1 + b_{2,n+2}x_2$$

Qo‘yish mumkin .

$d([e_1, x_1]) = [d(e_1), x_1] + [e_1, d(x_1)]$ dan foydalanib quyidagi chekli tengliklarni olamiz

$a_{1,i} = b_{1,n+1} = a_{1,n+1} = a_{1,n+2} = 0$, $b_{1,n-1} = 0, b_{1,1} = -a_{1,2}, 3 \le i \le n-1.$

Huddi shunday , $d([x_1, e_1])$ ва $d([x_1, x_1])$ uchun differensiallash xossasidan foydalanib $b_{1,i} = 0, 2 \le i \le n-2$ яъни

$d(e_{1)} = a_{1,1}e_1 + a_{1,2}e_2 + a_{1,n}e_n, d(x_1) = -a_{1,2}e_1 + b_{1,n}e_n + b_{1,n+2}x_2$.

$0 = d([x_2, x_1]) = [d(x_2), x_1] + [x_2, d(x_1)]$ dan $b_{2,i} = 0,\ 1 \le i \le n-2$

$b_{2,n} = b_{1,n}$ ekanligi kelib chiqadi.

$d([x_1, x_2])$ va $d([x_2, e_1])$ uchun differensiallash xossasidan foydalanib,

$b_{2,1} = 0$ ва $b_{2,n+1} = 0$, $a_{2,n-1} = a_{1,n}$ ni olamiz.

$d([e_1, e_1]) = [d(e_1), e_1] + [e_1, d(e_1)]$ tenglikdan $d(e_2) = 2a_{1,1}e_2 + a_{1,2}e_3$.

ekanligi kelib chiqadi.

$d([e_{n-1}, x_2]) = [d(e_{n-1}), x_2] + [e_{n-1}, d(x_2)]$ tenglikdan

$a_{2,n+1} = a_{2,n+2} = b_{2,n+2} = 0\ a_{2,i} = 0,\ 1 \le i \le n-2$ ga ega bo‘lamiz.

$d([e_{n-1}, x_1]) = [d(e_{n-1}), x_1] + [e_{n-1}, d(x_1)]$ tenglikdan $a_{2,n} = a_{1,2}$, $b_{1,n+2=}0$ ekanligi kelib chiqadi.

Buni induksiya metodi orqali ko‘rishimiz mumkin.

Va quyidagigacha natijaga erishamiz .

$$d(e_i) = \left((i)a_{1,1}e_i + a_{1,2}\, e_{i+1}\right) \ , 2 \le i \le n-3,$$
$$d(e_{n-2}) = (n-2)a_{1,1}e_{n-2}.$$
$$d(e_{n-1}) = a_{2,n-1}e_{n-1} + a_{1,2}e_n.$$
$$d(e_n) = (a_{2,n-1}+a_{1,1})e_n, \ \ d(x_1) = -a_{1,2}e_1 + b_{1,n}e_n.$$
$$d(e_{1)} = a_{1,1}e_1 + a_{1,2}e_2 + a_{1,n}e_n,$$
$$d(x_2) = a_{1,n}e_{n-1} + b_{1,n}e_n.$$

Tasdiq isbotlandi

Tasdiq 5. $R(M^{-2,1}, 2)$ Leybnist algebrasi to‘liqdir

Isboti: $R(M^{-2,1}, 2)$ algebraning markazining nolligi ko‘paytirish jadvalidan bevosita kelib chiqadi. Navbatda $R_{e_1}, R_{x_1}, R_{x_2}, R_{e_{n-1}}, R_{e_n}$ ichki differensiallashlarni hisoblab topamiz

$$\begin{cases} R_{e_1}(e_{n-1}) = e_n, \ \ R_{e_1}(x_1) = -e_1, \\ R_{e_1}(e_i) = e_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-3 \\ R_{x_1}(e_n) = e_n, \ \ R_{e_{n-1}}(x_2) = -e_{n-1} \\ R_{x_1}(e_i) = ie_i, \qquad 1 \le i \le n-2 \\ R_{x_2}(e_{n-1}) = e_{n-1}, \qquad R_{x_2}(e_n) = e_n \\ R_{e_n}(x_2) = -e_n, R_{e_{n-1}}(e_1) = -e_n, \\ R_{e_n}(x_1) = -e_n \end{cases}$$

Tasdiq 4 ga ko‘ra

$$Der(R(M^{-2,1}, 2)) = a_{1,1}R_{x_1} + a_{1,2}\, R_{e_1} - a_{1,n}R_{e_{n-1}} + a_{2,n-1}R_{x_2} - b_{1,n}R_{e_n}.$$

Natijada $R(M^{-2,1}, 2)$ algebraning barcha differensiallashlari ichki ekanligi kelib chiqdi.

Tasdiq isbotlandi

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Abdurasulov Q.K., Adashev J.Q., Casas J.M., Omirov B.A. Solvable Leibniz algebras whose nilradical is quasi-filiform Leibniz algebra of maximum length // Communications in Algebra. – 2017. – Vol. 47(4). – P. 1578–1594.
2. 2. Camacho L.M., Cañete E.M., Gòmez J.R., Omirov B.A. Quasi-filiform Leibniz algebras of maximum length // Sib. Math. Journal. – 2011. – Vol.52(5). – P. 840–853.

TEYLOR VA MAKLOREN FORMULALARI VA UNGA DOIR MISOLLAR

Maxamadiyeva Aziza Sherali qizi[1], Qo‘ziboyeva Mehriniso Ulug‘bek qizi[2], Ravshanova O‘g‘ilshod Abdurashid qizi[3], To‘rayeva Lobar Shuhrat qizi[4]

[1]ORCID:0009-0004-1584-1141,

Termiz davlat pedagogika instituti Matematika va informatika kafedrasi o‘qituvchisi, azizamaxamadiyeva6@gmail.com,

[1, 2, 3] Termiz davlat pedagogika instituti talabalari

https://doi.org/10.5281/zenodo.20610153

Annotatsiya*.Ushbu maqolada funksiyalarni Teylor va Makloren formulalari yordamida ko‘phadlar ko‘rinishida ifodalash masalalari yoritilgan.Tadqiqot davomida qoldiq hading Koshi va Lagranj ko‘rinishlari,shuningdek,elementar funksiyalarning Makloren qatoriga yoyilmalari tahlil qilingan.Maqolada keltirilgan amaliy misollar orqali limitlarni hisoblash va murakkab ifodalarni taqribiy qiymatlarini topishda ushbu formulalarning qulayligi va samaradorligi ko‘rsatib berilgan.*

Kalit so‘zlar*: Teylor formulasi, Makloren formulasi, qoldiq had, hosila, taqribiy hisoblash, limit,yoyilma.*

Аннотация*. В данной статье рассматриваются вопросы представления функций в виде многочленов с помощью формул Тейлора и Маклорена. В ходе исследования проанализированы формы остаточного члена Коши и Лагранжа, а также разложения элементарных функций в ряд Маклорена. На практических примерах показана эффективность данных формул при вычислении пределов и нахождении приближенных значений сложных выражений.*

Ключевые слова: *формула Тейлора, формула Маклорена, остаточный член, производная, приближенное вычисление, предел, разложение*

Abstract*.This article examines the representation of functions as polynomials using Taylor and Maclaurin formulas. The research analyzes the Cauchy and Lagrange forms of the remainder term,as well as the Maclaurin series expansions of elementary functions. Practical examples demonstrate the effectiveness of these formulas in calculating limits and finding approximate values of complex expressions.*

Keywords: *Taylor formula, Maclaurin formula, remainder term, derivative, approximate calculation, limit expansion*

KIRISH.Matematik analiz kursida funksiyalarning o‘rganishning eng samarali usullaridan biri ularni soda ko‘phadlar oraqali ifodalashdir. Teylor va Makloren Makloren formulalari murakkab funsiyalarni tahlil qilish, ularning nuqta atrofidagi xatti-harakatini aniqlash va hisoblash jarayonlarini soddalashtirish imkonini beradi. Ushbu ishning dolzarbligi matematik modellarni taqribiy hisoblashda xatoliklarni minimal darajaga tushurish usullarini o‘rganish bilan belgilanadi.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODLAR: Maqolani tayyorlashda Azlarov T. va Mansurov X. kabi olimlarning matematik analiz bo‘yicha fundamental darsliklaridan hamda Demidovich B.P.ning masalalar to‘plamidan foydalanildi.

Tadqiqotda matematik deduksiya, differensial hisob, funksiyalarni qatorga yoyish va matematik modellashtirish metodlaridan foydalanilgan. Xususan n-tartibli hosilaga ega funksiyalar uchun Teylor formulasi:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+0\left((x-x_0)^n\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+0\left((x-x_0)^n\right)\left(f^{(0)}(x)=\right.$$

ko‘rinishida tahlil qilindi.

NATIJALAR VA MUHOKAMA.

Tadqiqot natijasida quyidagi asosiy xulosalarga erishildi:

-Elementar funksiyalar $e^x, \sin x$, $\cos x, \ln(1+x)$ uchun Makloren formulalari tizimlashtirildi.

-Qoldiq hading Lagranj ko‘rinishidan foydalanib $\alpha=\sin 36$ va $\beta=(1,2)^{1,1}$ kabi miqdorlarni yuqori aniqlikda taqribiy hisoblash tartibi ko‘rsatildi.

_Limitlarni hisoblashda $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$ ko‘rinishidagi aniqmasliklarni ochishda Teylor yoyilmasining samaradorligi isbotlandi.

Funksiyaning Teylor va Makloren formulasi va unga doir misollar

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $(x_0\in\square)$ biror atrofida berilgan bo‘lsin. Agar funksiya x_0 nuqtaning shu atrofida $y=f'(x),f''(x),\ldots f^{(n-1)}(x)$ hosilalarga ega bulib, x_0 nuqtada n-tartibli $f^{(n)}(x_0)$ hosilaga ega bulsa, u holda

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+0\left((x-x_0)^n\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+0\left((x-x_0)^n\right)\left(f^{(0)}(x)=f(x)\right)$$

(1) bo‘ladi.Bu Teylor formulasidir.

2. Makloren formulasi. Agar (1) formulada $x_0=0$ deb olsak, unda ushbu

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n+0\left((x-0)^n\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k+0\left((x-0)^n\right) \quad (2)$$

formula hosil bo‘ladi. Bu Makloren formulasidir.

Ushbu $f(x)=e^x$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=(1+x)^m$, $f(x)=\ln(1+x)$ funksiyalar uchun (2) Makloren formulasi quyidagicha bo‘ladi:

1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots.+\dfrac{x^n}{n!}+0\left(x^n\right)$,

2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+0\left(x^{2n}\right)$,

3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+0\left(x^{2n+1}\right)$,

4) $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+0\left(x^n\right)$

5) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$

Teylor formulasi (oraliq uchun).

$y=f(x)$ funksiya [a,b] segmentda berilgan bo‘lsin. Agar funksiya shu segmentda $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$ hosilalarga ega bo‘lib, x_0 nuqtada $(a<x_0<b)$ $f^{(n+1)}(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

bo‘ladi. Bu *Teylor formulasidir*. $R_n(x)$ ni Teylor formulasining qoldiq hadi deyiladi. U quyidagi ko‘rinishlarga ega:

1) $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$ (Koshi ko‘rinishi). $(c=x_0+\theta(x-x_0), 0<\theta<1)$

2) $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ Lagranj ko‘rinishi, $(c=x_0+\theta(x-x_0), 0<\theta<1)$

1-misol. Ushbu $f(x)=\sqrt{x}$ funksiyani $x-1$ ning manfiy bo‘lmagan darajalari bo‘yicha yoyilmasining uchta xadini toping. Bu hol uchun (1) formula ushbu $f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+0\left((x-1)^2\right)$ ko‘rinishda bo‘ladi. Berilgan funksiyaning hosilalarini topamiz:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{e}}, f''(x)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Ravshanki,

$$f(1)=1, f'(1)=\frac{1}{2}, f''(1)=-\frac{1}{4}$$

Demak, $\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+0\left((x-1)^2\right)$

2-misol. Agar $x\to 0$ da

$$f(x)=1+\frac{1}{2}x+0(x)$$

bo‘lsa,

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)\right]^{\frac{1}{x}}=\sqrt{e}$$

bo‘lishini isbotlang.

Ushbu

$$y=\left[f(x)\right]^{\frac{1}{x}}$$

funksiyani qaraylik. Uni quyidagicha

$$y=e^{\ln\left[f(x)\right]^{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{1}{x}\ln\left[f(x)\right]}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Agar

$$\ln f(x)=\ln\left[1+\frac{1}{2}x+0(x)\right]$$

Hamda

$$\ln\left[1+\frac{1}{2}x+0(x)\right]=\frac{1}{2}x+0(x)$$

bo‘lishini e'tiborga olsak, unda

$$y = e^{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x+0(x)\right)} = e^{\frac{1}{2}+\frac{0(x)}{x}}$$

bo‘lishini topamiz. Keyingi tenglikdan

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}\left[f(x)\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{2}+\frac{0(x)}{x}}\right) = \sqrt{e}$$

ekanligi kelib chiqadi.

3-misol. Teylor formulasidan foydalanib ushbu

$$\alpha = \sin 36\,,\quad \beta = (1,2)^{1,1}$$

miqdorlarni taqribiy hisoblang.

(3) formulaga asoslanib

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + 0\left(x^5\right)$$

munosabatga va undan ushbu

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

taqribiy formulaga kelamiz. Bu taqribiy formuladan foydalanib, topamiz:

$$\alpha = \sin 36 = \sin\frac{\pi}{5} \approx \frac{\pi}{5} - \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi^3}{125} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{\pi^5}{5^5} \approx 0,588$$

Demak,

$$\alpha \approx 0,588$$

(3) formulaga asoslangan holda

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + 0\left(x^2\right)$$

bo‘lishiga ega bo‘lamiz. Bundan esa

$$(1+x)^m \approx 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + 0\left(x^2\right)$$

taqribiy formulaga kelamiz.

Endi shu formuladan foydalanib β mivdorni taqribiy hisoblaymiz:

$$\beta = (1,2)^{1,1} = 1,2\cdot(1,2)^{0,1} = 1,2\cdot(1+0,2)^{0,1} \approx 1,2\cdot\left(1+0,1\cdot 0,2 + \frac{0,1\cdot(-0,9)}{2}\cdot 0,2^2\right) \approx 1,121$$

Demak,

$$\beta \approx 1,121.$$

4-misol. (3) formulalardan foydalanib ushbu

a) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

limitlarni toping.

a) da ko‘rsatilgan limitni topishda (3) formulaning quyida

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + 0\left(x^2\right),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + 0\left(x^3\right)$$

holidan foydalanamiz

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+0\left(x^2\right)\right]\left[x-\frac{x^3}{3!}+0\left(x^3\right)\right]-x(1+x)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3+0\left(x^3\right)-x-x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+0\left(x^3\right)}{x^3} = \frac{1}{3}+\lim_{x\to 0}\frac{0\left(x^3\right)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Demak,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

b) da ko‘rsatilgan limitni topishda (3) formulaning

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^2 + 0\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

holidan foydalanamiz.

$$\lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+0\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left[x - x + \frac{1}{2} + 0\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

Demak,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \frac{1}{2}$$

5-misol.Quyidagi funksiyalarni Makloren formulasi bo‘yicha $0\left(x^2\right)$ hadgacha yoying:

a) $f(x) = e^{\sqrt{1+2x}}$

b) $f(x) = \ln\cos x$

a) da ko‘rsatilgan funksiyani Makloren qatoriga yoyish uchun Teylor qatoriga yoyish formulasida $x_0 = 0$ deb olib quyidagi formuladan foydalanamiz:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + 0\left((x-0)^2\right) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + 0\left(x^2\right)$$

Berilgan funksiyani hosilalarini topamiz

$$f'(x) = \left(e^{\sqrt{1+2x}}\right)' = e^{\sqrt{1+2x}}\cdot\left(\sqrt{1+2x}\right)' = e^{\sqrt{1+2x}}\cdot\frac{2}{2\sqrt{1+2x}} = \frac{e^{\sqrt{1+2x}}}{\sqrt{1+2x}}$$

$$f''(x)=\left(\frac{e^{\sqrt{1+2x}}}{\sqrt{1+2x}}\right)'=\frac{\left(e^{\sqrt{1+2x}}\right)'\sqrt{1+2x}-\left(\sqrt{1+2x}\right)'e^{\sqrt{1+2x}}}{\left(\sqrt{1+2x}\right)^2}=\frac{\frac{e^{\sqrt{1+2x}}}{\sqrt{1+2x}}\cdot\sqrt{1+2x}-e^{\sqrt{1+2x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2x}}}{1+2x}=\frac{e^{\sqrt{1+2x}}\left(\sqrt{1+2x}-1\right)}{\sqrt{(1+2x)^3}}\text{ E}$$

ndi $x_0=0$ nuqtadagi qiymatlarni topamiz:

$$f(0)=e$$
$$f'(0)=e$$
$$f''(0)=0$$

Hosil bo‘lgan qiymatlarni formulaga qo‘yamiz va quyidagini hosil qilamiz,

$$f(x)=e^{\sqrt{1+2x}}=e+e\cdot x+\frac{0\cdot x^2}{2!}+0\left(x^2\right)$$

b) da ko‘rsatilgan funksiya uchun ham shunday ishlarni amalga oshiramiz.

$$f(0)=0$$
$$f'(0)=0$$
$$f''(0)=-1$$

$$f(x)=\ln\cos x=0+\frac{0\cdot x}{1!}+\frac{(-1)\cdot x^2}{2!}+0\left(x^2\right)$$

Demak,

$$\ln\cos x=-\frac{x^2}{2}+0\left(x^2\right)$$

XULOSA

Teylor va Makloren formulalari nafaqat nazariy matematikada, balki amaliy muhandislik hisob-kitoblarida ham poydevor hisoblanadi. Maqolada keltirilgan misollar va tahlillar talabalarga murakkab funksiyalarni differensiallash orqali sodda ko‘rinishga keltirish ko‘nikmasini shakllantirishga xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1.А з л а р о в Т . А., М а н с у р о в Х. Математик анализ, 1- кисм,— Т , «Укитувчи», 1986.
2. Демидович Б . П . Сборник задач и упражнений по математическому анализу.— М .: Наука, 1977 ва бощка Йиллардаги нашрлари
3.А. САЪДУЛЛАЕВ, \ МАНСУРОВ, Г. ХУДОЙБЕРГАНОВ, А. БОРИСОВ, Р. РУЛОМОВ ТОШКЕНТ «УЗБЕКИСТОН» 1993

NILRADIKALI BERILGAN BA’ZI YECHILUVCHAN LEYBNITS ALGEBRALARINING $\frac{1}{2}$-DIFFERENSIALLASHLARI

Maxmudova Shoxsanam Shavkatjon qizi[1], Mamadaliyev O‘ktamjon Xasanboyevich[2]
[1]Namangan davlat universiteti, Matematika yo‘nalishi magistranti,
[2]Namangan davlat universiteti, Matematika kafedrasi dotsenti
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610190

Annotatsiya. *Ushbu maqolada nilradikali maksimal uzunlikdagi kvazi-filiform Leybnits algebrasi bo‘lgan yechiluvchan Leybnits algebrasining $1/2$-differesiallashlari o‘rganilgan.*

Kalit soz‘lar: *Leybnits algebrasi, yechiluvchan Leybnits algebrasi, nilradikal, algebraning $1/2$-differensiallashi.*

Abstract*. In this article we study $1/2$-derivations of solvable Leibniz algebras whose nilradical is a quasi-filiform Leibniz algebra of maximal length.*

Keywords: *Leibniz algebra, solvable Leibniz algebra, nilradical, $1/2$-derivation of algebra*

Аннотация. *В данной работе изучаются $1/2$-дифференцирования разрешимых алгебр Лейбница, нильрадикал которых является квази-филиформной алгеброй Лейбница максимальной длины.*

Ключевые слова: *алгебра Лейбница, разрешимая алгебра Лейбница, нилрадикал, $1/2$-дифференцирование алгебры.*

Ta’rif 1. F maydon ustida aniqlangan L algebraning ixtiyoriy x, y, z elementlari uchun quyidagi Leybnits ayniyati bajarilsa,

$$[x,[y,z]]=[[x,y],z]-[[x,z],y],$$

L algebra Leybnits algebrasi deyiladi, bu yerda [-,-] – L da aniqlangan ko‘paytirish amali.

Ixtiyoriy L Leybnits algebrasi uchun quyidagi quyi markaziy va hosilaviy ketma-ketliklarni mos ravishda aniqlaymiz:

$$L^1=L,\ L^{k+1}=[L^k,L^1];\ L^{[1]}=L,\ L^{[k+1]}=[L^{[k]},L^{[k]}],\ k\geq 1.$$

Ta’rif 3. L Leybnits algebrasi uchun shunday $s\in N$ son mavjud bo‘lib, $L^{[s]}=0$ (mos ravishda, $L^s=0$) bo‘lsa, u holda L yechiluvchan (mos ravishda, nilpotent) Leybnits algebrasi deyiladi.

Ta’rif 4. Ixtiyoriy Leybnits algebrasining maksimal nilpotent ideali uning nilradikali deyiladi.

Ta’rif 5. L Leybnits algebrasi, agar $L^{n-2} \neq 0$ va $L^{n-1} = 0$ bo‘lsa kvazi-filiform deyiladi, bu yerda $n = \dim L$.

Nilradikali N va to‘ldiruvchi fazosining o‘lchami s ga teng bo‘lgan barcha yechiluvchan Leybnis algebralari oilasini $R(N, s)$ bilan belgilaymiz.

Quyidagi teoremada nilradikali maksimal uzunlikdagi kvazi-filiform Leybnits algebrasi bo‘lgan va Q to‘ldiruvchi fazosining o‘lchami ikkiga teng bo‘lgan yechiluvchan Leybnits algebralarini tasnifi keltiriladi.

Teorema 1. [2] $R(M^{1,0},2)$ algebralar oilasining ixtiyoriy algebrasi quyidagi algebraga izomorf:

$$R(M^{1,0},2):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_n, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 2\le i\le n-2,\\ [e_1,x_1]=e_1, & [e_i,x_1]=(i-2)e_i, & 3\le i\le n-1,\\ [e_n,x_1]=2e_n, & [x_1,e_1]=-e_1, & \\ [e_i,x_2]=e_i, & & 2\le i\le n-1.\end{cases}$$

Teorema 2. [2] $R(M^{2,\lambda},2)$ algebralar oilasining ixtiyoriy algebrasi quyidagi algebralardan biriga izomorf;

$$R(M^{2,0},2):\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-3, & [e_{n-1},e_1]=e_n,\\ [e_i,x_1]=ie_i, & 1\le i\le n-2, & [e_n,x_1]=e_n,\\ [x_1,e_1]=-e_1, & [e_{n-1},x_2]=e_{n-1}, & [e_n,x_2]=e_n.\end{cases}$$

$$R(M^{2,-1},2):\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-3, & [x_1,e_1]=-e_1,\\ [e_{n-1},e_1]=-[e_1,e_{n-1}]=e_n, & & [e_n,x_1]=-[x_1,e_n]=e_n,\\ [e_i,x_1]=ie_i, & 1\le i\le n-2, & \\ [e_{n-1},x_2]=-[x_2,e_{n-1}]=e_{n-1}, & & [e_n,x_2]=-[x_2,e_n]=e_n.\end{cases}$$

Ta’rif 4. Aytaylik d– L Leybnits algebrasining chiziqli almashtirishi bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $x, y \in L$ lar uchun quyidagi tenglik bajrilsa

$$d([x,y])=\frac{1}{2}([d(x),y]+[x,d(y)]),$$

u holda d chiziqli almashtirishga L Leybnits algebrasining $\frac{1}{2}$-differensiallashi deyiladi.

[1] ishda $R(M^{1,0},2)$, $R(M^{2,0},2)$ va $R(M^{2,-1},2)$ algebralarning differensiallashlari topilgan. Quyidagi tasdiqda $R(M^{1,0},2)$ algebrani $\frac{1}{2}$-differensiallashi topilgan.

Tasdiq 1. $R(M^{1,0},2)$ algebraning ixtiyoriy $\frac{1}{2}$-differensiallashi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$d(e_i) = a_{1,1}e_i, \qquad 1 \le i \le n,$$
$$d(x_i) = a_{1,1}x_i, \quad 1 \le i \le 2.$$

Isbot. Aytaylik d - $R(M^{1,0},2)$ algebraning $\frac{1}{2}$-differensiallashi bo‘lsin. d-$\frac{1}{2}$-differensiallashni hosil qiluvchi bazis elementlari uchun berish yetarli, shuning uchun aytaylik,

$$d(e_1) = \sum_{i=1}^{n} a_{1,i}e_i + a_{1,n+1}x_1 + a_{1,n+2}x_2,$$
$$d(e_2) = \sum_{i=1}^{n} a_{2,i}e_i + a_{2,n+1}x_1 + a_{2,n+2}x_2,$$
$$d(x_1) = \sum_{i=1}^{n} b_{1,i}e_i + b_{1,n+1}x_1 + b_{1,n+2}x_2,$$
$$d(x_2) = \sum_{i=1}^{n} b_{2,i}e_i + b_{2,n+1}x_1 + b_{2,n+2}x_2$$

bo‘lsin.

$\frac{1}{2}$-differensiallashni ta’rifidan foydalanib quyidagi tengliklarni qarab chiqamiz.

1. $d([e_1,e_2]) = \frac{1}{2}[d(e_1),e_2] + \frac{1}{2}[e_1,d(e_2)]$ tenglikni qarab bundan esa, $a_{2,1} = 0,\ a_{2,n+1} = 0$ natijalarni olamiz.

Bu natijalar orqali

$$d(e_2) = \sum_{i=2}^{n} a_{2,i}e_i + a_{2,n+2}x_2$$

kabi ko‘rinishiga erishamiz.

2. $d([e_1,x_2]) = \frac{1}{2}[d(e_1),x_2] + \frac{1}{2}[e_1,d(x_2)]$ ni qaraylik. $d([e_1,x_2]) = 0$ ga teng.

Bundan quyidagicha natija olamiz:

$$b_{2,1} = 0,\ b_{2,n+1} = 0,\ a_{1,i} = 0,\ 2 \le i \le n-2.$$

Bundan

$$d(e_1) = a_{1,1}e_1 + a_{1,n}e_n + a_{1,n+1}x_1 + a_{1,n+2}x_2, \ (1)$$
$$d(x_2) = \sum_{i=2}^{n} b_{2,i}e_i + b_{2,n+2}x_2$$

natijalarni olamiz.

3. Endi $d([e_1,e_1]) = \frac{1}{2}[d(e_1),e_1] + \frac{1}{2}[e_1,d(e_1)]$ tenglikni ko‘raylik. $d([e_1,e_1]) = d(e_n)$ bo‘ladi.

Bundan

$$d(e_n) = a_{1,1}e_n \qquad (2)$$

olamiz.

4. $d([e_2, x_1]) = \frac{1}{2}[d(e_2), x_1] + \frac{1}{2}[e_2, d(x_1)]$ ni qaraymiz

Bu tenglikdan

$$a_{2,i} = 0,\ 4 \le i \le n-2,$$
$$b_{1,n+2} = 0,$$
$$b_{1,1} = -a_{2,3}$$

natijalarni olamiz.

Olingan natijalar orqali kerakli tengliklarni topamiz.

$$d(e_2) = a_{2,2}e_2 + a_{2,3}e_3 + a_{2,n+2}x_2, \quad (3)$$

$$d(x_1) = -a_{2,3}e_1 + \sum_{i=2}^{n} b_{1,i}e_i + b_{1,n+1}x_1$$

5. Endi $d([x_1, e_1]) = \frac{1}{2}[d(x_1), e_1] + \frac{1}{2}[x_1, d(e_1)]$ tenglikni qaraylik.

Olgan tengligimizni (1) ga tenglaymiz va quyidagi natijalarni olamiz:

$$b_{1,n+1} = a_{1,1},$$
$$a_{2,3} = 2a_{1,n}, \qquad (1')$$
$$b_{1,i} = 0,\ 2 \le i \le n-2,$$
$$a_{1,n+1} = 0,\ a_{1,n+2} = 0.$$

Olingan natijalardan quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$d(e_1) = a_{1,1}e_1 + a_{1,n}e_n, \qquad (4)$$

$$d(x_1) = -2a_{1,n}e_1 + b_{1,n-1}e_{n-1} + b_{1,n}e_n + a_{1,1}x_1. \quad (5)$$

6. $d([e_2, x_2]) = \frac{1}{2}[d(e_2), x_2] + \frac{1}{2}[e_2, d(x_2)]$ tenglikni olaylik.

Yuqoridan $a_{2,2} = b_{2,n+2}$, $a_{2,3} = b_{2,2}$, $a_{2,n+2} = 0$ ni olamiz. Bundan

$$d(e_2) = a_{2,2}e_2 + a_{2,3}e_3$$

ni hosil qilamiz.

7. $d([e_n, x_1]) = \frac{1}{2}[d(e_n), x_1] + \frac{1}{2}[e_n, d(x_1)] =$

$$\frac{1}{2}[d(e_n), x_1] + \frac{1}{2}[e_n, d(x_1)] = (a_{1,1} + b_{1,n+1})e_n$$

ni olamiz. Ko‘rish qiyin emaski $d(e_n) = \frac{1}{2}(a_{1,1} + b_{1,n+1})e_n$ bo‘ladi.

Olganimizni (2) bilan tenglaymiz va

$$a_{1,1} = b_{1,n+1} \qquad (2')$$

ni olamiz.

8. $d\left(\left[x_1,x_2\right]\right)=\frac{1}{2}\left[d\left(x_1\right),x_2\right]+\frac{1}{2}\left[x_1,d\left(x_2\right)\right]$ tenglikdan quyidagi natijani olamiz:

$$b_{1,n-1}=0.$$

Natijani va $(1')$ ni (5) ga olib borib qo‘ysak $d\left(x_1\right)=-a_{2,3}e_1+b_{1,n}e_n+b_{1,n+1}x_1$ hosil bo‘ladi.

9. $d\left(\left[e_1,x_1\right]\right)=\frac{1}{2}\left[d\left(e_1\right),x_1\right]+\frac{1}{2}\left[e_1,d\left(x_1\right)\right]$ ifodani olaylik. $d\left(\left[e_1,x_1\right]\right)=d\left(e_1\right)$ hosil bo‘ladi. Bu tenglikdan $d\left(e_1\right)=\frac{1}{2}\left(a_{1,1}+b_{1,n+1}-a_{2,3}\right)e_1+\frac{1}{2}a_{1,n}e_n$ natijani olamiz.

Olingan tenglikni (4) ga tenglaymiz va

$$a_{1,n}=0, a_{1,1}=b_{1,n+1}-a_{2,3}\ \ (3')$$

tengliklarni olamiz. $(2')$ ni $(3')$ ga qo‘ysak,

$$a_{2,3}=0\ \ (4')$$

natijani olamiz. Olingan natijalarni tengliklarga qo‘ysak

$$d\left(x_1\right)=a_{1,1}x_1+b_{1,n}e_n,\ d\left(e_1\right)=a_{1,1}e_1,\ d\left(e_2\right)=a_{2,2}e_2$$

larga ega bo‘lamiz.

10. $\frac{1}{2}$ - differensiallashni $\left[x_2,e_1\right]$ ko‘paytma uchun qarasak,

$$d\left(\left[x_2,e_1\right]\right)=\frac{1}{2}\left[d\left(x_2\right),e_1\right]+\frac{1}{2}\left[x_2,d\left(e_1\right)\right].$$ Bundan

$$b_{2,i}=0,\ \ 2\le i\le n-2$$

kelib chiqadi. Buni o‘rniga olib borib qo‘ysak

$$d\left(x_2\right)=b_{2,n-1}e_{n-1}+b_{2,n}e_n+a_{2,2}x_2\ \ (6)$$

ni hosil qilamiz.

11. $d\left(\left[x_2,x_1\right]\right)=\frac{1}{2}\left[d\left(x_2\right),x_1\right]+\frac{1}{2}\left[x_2,d\left(x_1\right)\right]$ tenglikdan

$0=\frac{1}{2}\left[d\left(x_2\right),x_1\right]+\frac{1}{2}\left[x_2,d\left(x_1\right)\right]=2b_{2,n}e_n+\left(n-3\right)b_{2,n-1}e_{n-1}$ ni topamiz. Bundan $b_{2,n}=0,\ b_{2,n-1}=0$ olamiz. Olinganlarni (6) ga olib borib qo‘ysak

$$d\left(x_2\right)=a_{2,2}x_2$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

12. $d\left(\left[x_1,x_1\right]\right)=\frac{1}{2}\left[d\left(x_1\right),x_1\right]+\frac{1}{2}\left[x_1,d\left(x_1\right)\right]$ tenglikni qarasak,

$0=\frac{1}{2}\left[d\left(x_1\right),x_1\right]+\frac{1}{2}\left[x_1,d\left(x_1\right)\right]=2b_{1,n}e_n$ bo‘ladi. Bu yerdan $b_{1,n}=0$ ni olamiz. Olingan natijalarni olib tengliklarga qo‘ysak

$$d\left(x_1\right)=a_{1,1}x_1$$

natijani hosil qilamiz.

13. $d\left(\left[e_2,e_1\right]\right)=\frac{1}{2}\left[d\left(e_2\right),e_1\right]+\frac{1}{2}\left[e_2,d\left(e_1\right)\right]$ tenglikdan $d\left(e_3\right)=\frac{1}{2}\left(a_{1,1}+a_{2,2}\right)e_3$ tenglikni olamiz. Bundan $d\left(e_3\right)=\frac{1}{4}\left(\left(a_{1,1}+3a_{2,2}\right)e_3\right)$ tenglikni olamiz. Yuqorida olingan bu tengliklardan

$$a_{2,2}=a_{1,1} \quad (7)$$

ekanligini olamiz. Bundan $d\left(e_2\right)=a_{1,1}e_2$, $d\left(e_3\right)=a_{1,1}e_3$, $d\left(x_2\right)=a_{1,1}x_2$ bo‘ladi.

14. $\frac{1}{2}$- differensialni $d\left(\left[e_3,e_1\right]\right)=\frac{1}{2}\left[d\left(e_3\right),e_1\right]+\frac{1}{2}\left[e_3,d\left(e_1\right)\right]$ tenklikdan $d\left(e_4\right)=a_{1,1}e_4$ ga ega bo‘lamiz. $d\left(e_5\right)$ni hisoblab, olingan natijalarni umumlashtiramiz.

15. $d\left(\left[e_4,e_1\right]\right)=\frac{1}{2}\left[d\left(e_4\right),e_1\right]+\frac{1}{2}\left[e_4,d\left(e_1\right)\right]$ ni qaraylik, bundan

$$d\left(e_5\right)=a_{1,1}e_5$$

natijani olamiz.

Olingan natijalarni umumlashtirib, matematik induksiya yordamida

$$d\left(e_i\right)=a_{1,1}e_i, \qquad 3\le i\le n-1,$$

tenglikni osonlik bilan olishimiz mumkin. Shunday qilib,

$$d\left(e_i\right)=a_{1,1}e_i, \qquad 1\le i\le n,$$
$$d\left(x_i\right)=a_{1,1}x_i, \quad 1\le i\le 2.$$

$\frac{1}{2}$- differensiallashni qolgan barcha ko‘paytmalar uchun qarasak, faqat ayniyatlarni olamiz. □

Teorema. $R(M^{2,0},2)$ algebraning ixtiyoriy $\frac{1}{2}$-differensiallashi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$d\left(e_i\right)=a_{1,1}e_i, \qquad 1\le i\le n,$$
$$d\left(x_i\right)=a_{1,1}x_i, \quad 1\le i\le 2.$$

$R(M^{2,-1},2)$ algebraning ixtiyoriy $\frac{1}{2}$-differensiallashi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$d\left(e_i\right)=a_{1,1}e_i, \quad 1\le i\le n,$$
$$d\left(x_1\right)=b_{1,n}e_n+a_{1,1}x_1,$$
$$d\left(x_2\right)=b_{1,n}e_n+a_{1,1}x_2 .$$

Isbot. $R(M^{1,0},2)$ algebraning yuqorida keltirilgan isbotiga o‘xshash isbotlanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Adashev J. Q., Mamadaliyev U. X. The rigidity of some solvable Leibniz algebras with quasi-fliform nilradical of maximum length // Uzbek Mathematical Journal. – 2018. – 3. – P. 13–21.
2. Abdurasulov Q.K., Adashev J.Q., Casas J.M., Omirov B.A. Solvable Leibniz algebras whose nilradical is quasi-filiform Leibniz algebra of maximum length // Communications in Algebra. – 2017. – Vol. 47(4). – P. 1578–1594.

TOPOLOGIK VEKTOR FAZOLARDAGI BA’ZI TO‘PLAMLARNING XARAKTERISTIKALARI

Nuritdinov Jalolxon Tursunboy o‘g‘li[1], Rasulova Zinnurabonu Bobomurod qizi[2]
[1]Qo‘qon Davlat Universiteti matematika kafedrasi o‘qituvchisi,
[2]Qo‘qon Davlat Universiteti talabasi
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610238

Annotatsiya. *Ushbu maqolada topologik vektor fazolarda aniqlangan ba’zi to‘plamlarning xossalari va ularni turli topologiyalarga ko‘ra uzluksiz akslantirishlarda o‘zgarishi o‘rganilgan. Xususan, qavariq, kompakt, yopiq, yutuvchi hamda muvozanatlashgan to‘plamlarning asosiy geometrik va topologik xususiyatlari tahlil qilinib, ularning uzluksiz akslantirishlar ostidagi saqlanish shartlari ko‘rib chiqilgan. Olingan natijalar funksional analiz va ko‘pqiymatli akslantirishlar nazariyasining ayrim masalalarini o‘rganishda qo‘llanilishi mumkin.*

Kalit so‘zlar: *topologiya, vektor fazo, uzluksiz akslantirish, vektorlarni skalyarga ko‘paytirish.*

Topologik vektor fazolar nazariyasi funksional analizning muhim bo‘limlaridan biri bo‘lib, u algebraik va topologik strukturalarning uyg‘unlashuvi asosida shakllangan. Mazkur yo‘nalishning dastlabki rivojlanishi Stefan Banax, Jon Nevman va Andrey Kolmogorov kabi olimlarning ishlari bilan bog‘liq bo‘lib, ular chiziqli fazolarni topologik jihatdan o‘rganishning nazariy asoslarini yaratganlar. Ayniqsa, normallangan va lokal qavariq fazolar haqidagi natijalar keyingi tadqiqotlar uchun poydevor vazifasini bajargan.

Keyingi bosqichlarda topologik vektor fazolarni o‘rganish funksional analiz, differensial tenglamalar, optimallashtirish nazariyasi va taqsimotlar nazariyasi bilan chambarchas bog‘landi. X.Shefer tomonidan yozilgan [1] adabiyotda topologik vektor fazolarning muhim xossalari va tadbiqlari juda tushinarli tarzda yoritilgan. Shuningdek, lokal qavariq fazolar, Freshe fazolari va Gilbert fazolarining turli xossalari bo‘yicha ko‘plab ilmiy natijalar olingan.

Hozirgi davr tadqiqotlarida topologik vektor fazolar operatorlar nazariyasi, konveks analiz va ehtimollar nazariyasida keng qo‘llanilmoqda [2,3]. Xususan, dual fazolar, uzluksiz chiziqli funksionallar hamda kompakt operatorlar bilan bog‘liq masalalar dolzarb ilmiy yo‘nalishlardan biri hisoblanadi. Zamonaviy maqolalarda topologik vektor fazolar yordamida chiziqli va nochiziqli operatorlarning xossalarini tavsiflash, optimallashtirish masalalarini yechish hamda matematik fizika tenglamalarining yechimlarini tadqiq qilishga alohida e’tibor qaratilmoqda.

[4] ishda Banax fazolaridan umumiyroq bo‘lgan lokal qavariq fazolarni o‘rganish zarurligi va bu fazolarning matematik analizdagi ahamiyatini ko‘rsatilgan. Ayniqsa, seminormlar yordamida topologiya aniqlanishi lokal qavariq fazolar nazariyasining markaziy g‘oyalaridan biri sifatida bayon etilgan.

Shuningdek, topologik vektor fazolar Minkovskiy yig‘indisi va ayirmasi kabi to‘plamlar ustida bajariladigan geometrik amallarning bajarilishi uchun ”qulay” bo‘lib, [5] ishda bu amallarning ba’zi topologik xossalari keltirilgan.

1-ta’rif. Kompleks sonlar maydoni $\mathbb{C}$ ustidagi vektor fazo X da τ topologiyasi berilgan bo‘lib, agar qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari (X,τ) dan (X,τ) ga uzluksiz akslantirishlar bo‘lsa, u holda (X,τ) vektor topologik fazo deyiladi.

Bu ta’rifni batafsil ko‘rib chiqaylik. Avvalo, topologik fazolarning dekart ko‘paytmasi tushunchasini eslatib o‘tamiz. $(X_1,\tau_1)\times(X_2,\tau_2)$ deb quyidagi topologik fazoga aytiladi:

$$X = X_1 \times X_2, \quad \tau = \tau_1 \times \tau_2,$$

$$X = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\},$$

$$\tau = \tau_1 \times \tau_2 = \{(U_1, U_2) : U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}.$$

Quyidagi akslantirishlarning uzluksizligi talab etiladi:

$$F_1(x,y) : (X,\tau)\times(X,\tau) \to (X,\tau),$$

$$F_1(x,y) = x + y,$$

shuningdek,

$$F_2(\lambda, x) : (\mathbb{C}^1, d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|)\times(X,\tau) \to (X,\tau),$$

$$F_2(\lambda, x) = \lambda \cdot x.$$

1-misol. $(\mathbb{C}^1, d(x,y) = |x-y|)$ metrik fazosi $\mathbb{C}^1$ maydoni ustida vektor topologik fazodir. Keling, $F_1(x,y)$ va $F_2(\lambda,x)$ akslantirishlarning uzluksizlik shartlari bajarilishini isbotlaylik.

a) $F_1(x,y)$ ning uzluksizligi. $(\mathbb{C}^1, d(x,y) = |x-y|)$ metrik fazo bo‘lgani uchun uzluksizlik yaqinlashuvchi ketma ketliklar orqali isbotlanadi. Faraz qilaylik,

$$x_n \to x, \quad y_m \to y.$$

Biz ko‘rsatishimiz kerak $F_1(x_n, y_m) \to F_1(x,y)$ ekanligini, ya’ni $|x_n + y_m| \to |x+y|$ ekanligini. Bu ifoda $d(F_1(x_n,y_m), F_1(x,y)) \to 0$ ifodaga ekvivalent. Buni ko‘rsatish uchun uchburchak tengsizligidan foydalanamiz, demak $n \to +\infty$ va $m \to +\infty$ da

$$d(F_1(x_n,y_m), F_1(x,y)) = |x_n - x - y + y_m| \le |x - x_n| + |y - y_m| \to 0$$

bo‘ladi.

b) $F_2(x,y)$ ning uzluksizligi. Haqiqatan ham, faraz qilaylik,

$$\lambda_n \to \lambda, \quad x_m \to x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_0(F_2(\lambda_n, x_m), F_2(\lambda, x)) = |\lambda_n x_m - \lambda x| \le |\lambda_n - \lambda|\,|x_m| + |\lambda|\,|x_m - x| \to 0$$

$n \to +\infty$ va $m \to +\infty$ da.

Quyidagi misolda aynan $\mathbb{C}$ to‘plamda shunday τ topologiya kiritilganki bu topologiya bilan $(\mathbb{C},\tau)$ topologik fazo bo‘ladi lekin topologik vector fazo bo‘lmaydi.

2-misol. $\mathbb{C}$ da quyidagi topologiyani olaylik:

$$\tau = \{\varnothing\} \cup \{U \subset \mathbb{C} : 0 \in U\}$$

ya’ni 0 ni o‘z ichiga olgan barcha to‘plamlar ochiq. Bu topologiya bilan $(\mathbb{C},\tau)$ topologik fazo bo‘ladi. Endi qo‘shish $F_1(x,y) = x + y$ akslantirishini tekshiramiz.

Qo‘shish akslantirish: $F : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\quad F(x,y) = x + y$

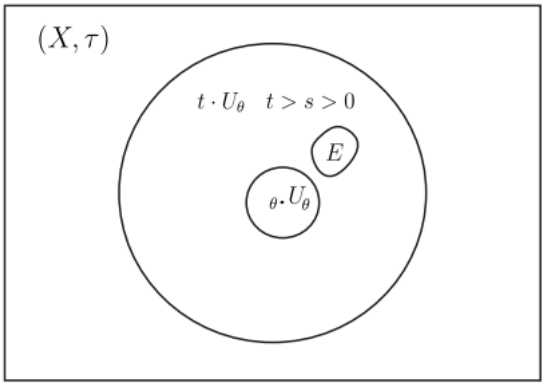
Topologiyaga ko‘ra $U = \{0\}$ ochiq, chunki $0 \in U$. Bu to‘plamning proobrazini topamiz $F^{-1}(U) = \{(x,y) : x + y = 0\}$. Bu to‘plam tekislikdagi $y = -x$ to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi va $\mathbb{C}\times\mathbb{C} = \mathbb{C}^2$ tekislikda ochiq emas. Chunki, ixtiyoriy $(x_0,y_0) \in F^{-1}(U)$ nuqtaning har qanday

atrofi $U_0 \times U_0$, $U_0 \in \tau$ ($\square \times \square = \square^2$ dagi topologiya τ topologiyaning o‘ziga o‘zini to‘g‘ri ko‘paytmasidan tashkil topgan) ko‘rinishda bo‘ladi. $U_0 \times U_0$ to‘plam $\square^2$ da ochiq to‘rtburchak sohani aniqlaydi va $U_0 \times U_0 \subset F^{-1}(U)$ munosabat bajarilmaydi. Demak, $F_1(x,y) = x + y$ akslantirish uzluksiz emas ekan. Shuning uchun $(\square, \tau)$ topologik vector fazo bo‘lmaydi.

2-ta’rif. X vektor fazodagi E to‘plam **muvozanatlashgan** deyiladi, agar barcha $|\lambda| \le 1$ ni qanoatlantiruvchi $\lambda \in C$ lar uchun $\lambda E \subset E$ munosabat o‘rinli bo‘lsa.

1-misol. $(X, \|\cdot\|)$ normalangan fazoda $\{x \in X : \|x - x_0\| < d_0\}$ to‘plam muvozanatlashgan to‘plam bo‘ladi. Bu yerda x_0 - koordinata boshi ya’ni nol nuqta.

3-ta’rif. (X, τ) tvs da E to‘plam **chegaralangan** deyiladi, agar no‘lning barcha atroflari U_θ uchun shunday $s > 0$ son topilib $t > s$ lar uchun $E \subset tU_0$ munosabat bajarilsa.



1-rasm. E chegaralangan to‘plam

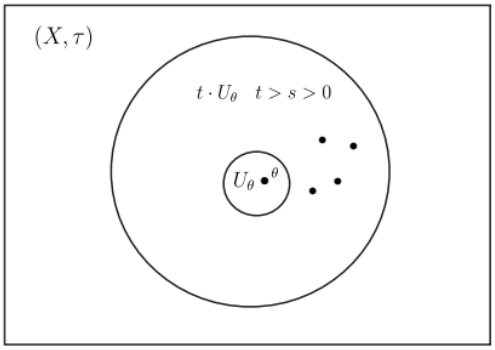
4-ta’rif. (X, τ) tvs da E to‘plam **yutuvchi** deyiladi, agar har qanday $x \in X$ nuqta uchun shunday $t = t(x) > 0$ son topilib $x \in t \cdot E$ munosabat o‘rinli bo‘lsa.

2-misol. Nolning barcha atroflari yutuvchi to‘plamga misol bo‘ladi.

1-tasdiq. Topologik vektor fazoda nolning har qanday atrofi chegaralangan to‘plamni yutadi.

1-lemma. $\{x\} \in X$ to‘plam har qanday (X, τ) topologik vektor fazoda chegaralangan bo‘ladi.

3-misol. Nuqtalarning chekli oilasi $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$ chegaralangan to‘plam o‘ladi.



2-rasm. Nuqtalarning chekli oilasi – chegaralangan to‘plam

5-ta’rif. (X,τ) tvs da E to‘plam **absolyut qavariq** deyiladi, agar u bir vaqtning o‘zida ham qavariq, ham muvozanatlangan bo‘lsa.

4-misol. $(X,\|\cdot\|)$ normalangan fazoda $\{x\in X:\|x-x_0\|<d_0\}$ to‘plam absolyut qavariq to‘plam bo‘ladi. Bu yerda x_0 - koordinata boshi ya’ni nol nuqta.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Schaefer, H. H., & Wolff, M. P. (1999). *Topological vector spaces* (2nd ed.). Springer.
2. Kömura, Y. (1964). Some examples on linear topological spaces. *Mathematische Annalen, 153*(2), 150–162.
3. Mackey, G. W. (1945). On infinite-dimensional linear spaces. *Transactions of the American Mathematical Society, 57*(2), 155–207.
4. Dieudonné, J. (1953). Recent developments in the theory of locally convex vector spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society, 59*(6), 495–512.
5. Nuritdinov, J., Aroev, D., Zhumakulov, K., & Ummatova, M. (2025). Topological properties of the Minkowski operations. *AIP Conference Proceedings, 3356*(1), 040007. https://doi.org/10.1063/5.0296162

ALGEBRAIK VA TRANSENDENT TENGLAMALAR, ULARNI YECHISHNING GEOMETRIK TALQINI

Qahramonova Farangiz Baxtiyorjon qizi
Talaba, Qo‘qonDU
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610289

Annotatsiya. *Mazkur maqolada algebraik va transendent tenglamalarning nazariy asoslari, ularning klassifikatsiyasi hamda echimlarini topish usullari yoritilgan. Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni echishda analitik va iteratsion usullarning qo‘llanilishi, ildizlarning mavjudligi, soni va xarakterini aniqlash masalalari ko‘rib chiqilgan. Tenglamalarni echishning geometrik talqini asosida tenglama ildizlarining funksiya grafigining Ox o‘qi bilan kesishish nuqtalari sifatidagi mazmuni ochib berilgan. Shuningdek, algebraik tenglamalar ildizlarini grafik usul yordamida ajratish jarayoni misollar orqali tahlil qilingan.*

Kalit so‘zlar: *algebraik tenglama, transendent tenglama, chiziqli bo‘lmagan tenglama, tenglama ildizi, geometrik talqin, grafik usul, iteratsion usul, analitik usul, karrali ildiz, funksiya grafigi.*

Biz bilgan chiziqli tenglama

$$f(x)=0 \qquad (1)$$

chiziqli bo‘lmagan tenglamaning ildizini (barcha ildizlarini) topish talab etiladi.

Agar f(x) funksiya ko‘phad bo‘lsa, u holda (1) tenglama n–darajali algebraik tenglama deb ataladi, ya’ni

$$f(x) = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x^1 = 0 \qquad (2)$$

bunda $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – berilgan $P_n(x)$ ko‘phadning koeffisiyentlari.

Boshqacha aytganda, algebraik tenglama deb algebraik (butun, ratsional, irratsional) funksiyalardan tashkil topgan tenglamaga aytiladi.

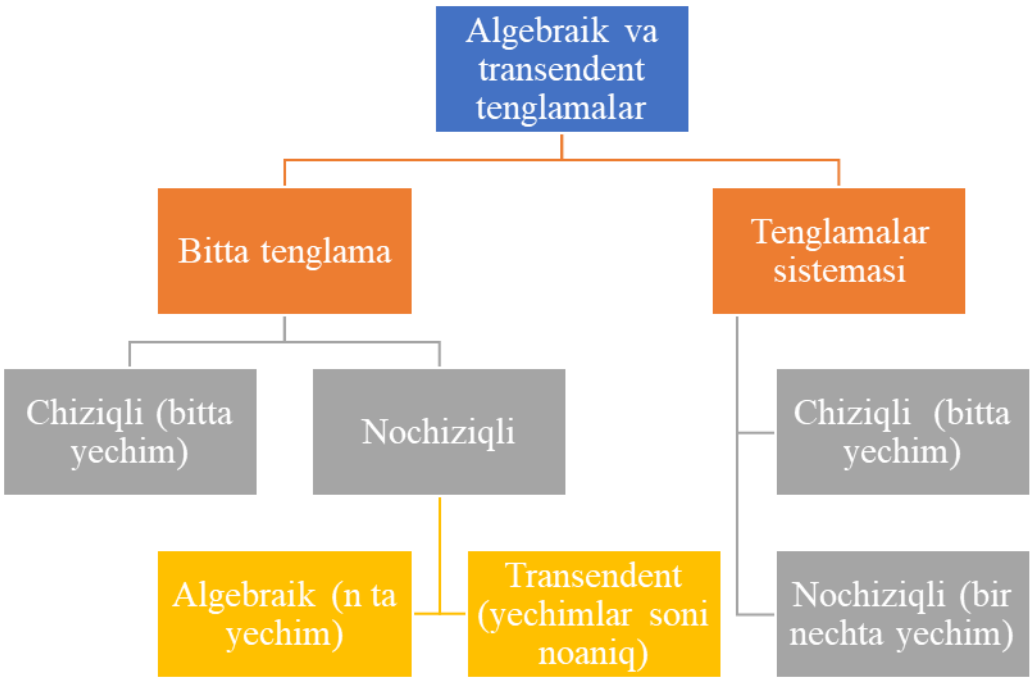
Darajasi to‘rtdan yuqori bo‘lgan algebraik tenglamalar uchun uning ildizlarini koeffisiyentlari orqali ifodalovchi aniq formula mavjud emas. Algebraik tenglama ildizlari sonini ko‘phadning darajasiga qarab, ularning xarakterini esa shu ko‘phad koeffisiyentlarining ishorasiga qarab aniqlash mumkin. Quyiroqda n–darajali algebraik tenglama, ya’ni $P_n(x)$ ko‘phadning ildizlari haqida kengroq tushunchalar berilgan. Algebraik bo‘lmagan har qanday tenglama transendent tenglama (transendent funksiyalar: ko‘rsatgichli, logarifmik, trigonometrik, teskari trigonometrik va boshqa funksiyalarni o‘z ichiga olgan tenglama) deb ataladi. Misol uchun,

$$\frac{(1.3x+6)}{(6.9x-7)\sin(3x)} - 0.6x^2 = 1$$

Ba’zi hollarda transendent tenglamalar ildizlarining aniq qiymatini topish mumkin. Transendent tenglamalar birorta ham haqiqiy ildizga ega bo‘lmasligi, chekli yoki cheksiz sondagi ildizlarga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, yuqorida keltirilgan misollardan birinchi tenglama 7 ta, ikkinchisi esa 5 ta

haqiqiy ildizga ega (buni mustaqil aniqlang, masalan, Maple dasturi yordamida uning grafigini chizing).

Shularga ko‘ra tenglamaning taqribiy ildizlarini topish usullari va ularning aniqlik darajasi muhim ahamiyatga ega. Shunday qilib, algebraik va transendent tenglamalar ikki turga bo‘linadi: chiziqli (bitta echimli) va chiziqli bo‘lmagan (bir yoki bir nechta echimli) tenglamalar. Chiziqli bo‘lmagan tenglamalar esa: algebraik (yechimlari n ta) va transendent (yechimlari soni noma’lum) tenglamalarga bo‘linadi (1-rasm).



1-rasm. Tenglamalar klassifikatsiyasi.

Masalani yechish bosqichlari: Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechish usullari ikki turga bo‘linadi: to‘g‘ri (yoki analitik) va taqribiy (iteratsion) usullar. Analitik usulda tenglamaning barcha echimlari chekli sondagi operatsiyalarda (yoki formulalar) orqali aniqlanadi. Masalan, shu usulga ushbu $ax^2+bx+c=0$ – kvadrat tenglamaning echimlarini topishni misol qilib keltirish mumkin. Bu tenglamaning echimlari quyidagicha:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

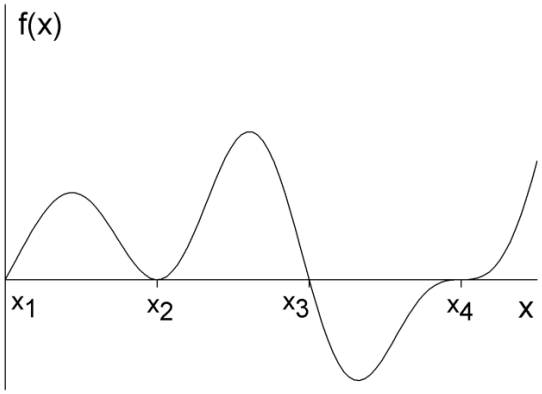
Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni echish bir necha bosqichga bo‘linadi: ildizlarning mavjudligini, sonini, xarakterini va ularning joylashishini tekshirish; ildizlarni ajratish; ildizlarning taqribiy qiymatlarini topish,ya’ni tenglamaning yagona ildizi mavjud bo‘lgan etarlicha kichik [a,b]kesmani aniqlash (dastlabki yaqinlashuvchi ildiz); ildizlarning barchasini yoki ularning bir qismini talab qilingan aniqlikda topish.

Dastlabki uchta bosqichda analitik yoki grafik usuldan (ba’zida tadqiqot obyekti yoki hodisaning fizik ma’nosidan) foydalanish mumkin. Bunda quyidagi holatlar kuzatiladi: ildiz yagona; cheksiz ko‘p echimlar; ildiz yo‘q; bir nechta echimlar mavjud bo‘lib, ulardan ba’zilari haqiqiy, ba’zilari esa mavhum; ildizlar karrali; ildizlar bir biriga juda yaqin va dastlabki yaqinlashishni topish murakkab.

Oxirgi bosqichda esa biror taqribiy (iteratsion) usuldan foydalaniladi, bunda dastlabki tenglamaning ildizini topish juda murakkab bo‘lgan olda bu tenglama uning ildiziga teng yoki unga juda ham yaqin joylashgan ildizli sodda tenglamaga ham almashtirilishi (masalan, transendent tenglamani algebraik tenglamaga almashtirish) mumkin.

Tenglamani yechishning geometrik usuli. Tenglamaning ildizlari har xil bo‘lishi mumkin. Geometrik nuqtai nazardan bu $\bar{x}$ ildiz y = f(x) funksiya grafigining Ox abssissa o‘qi bilan kesishish nuqtasini bildiradi. Agar birinchi tartibli hosila $f'(\bar{x}) \neq 0$ bo‘lsa, u holda $\bar{x}$ – oddiy ildiz, aks holda esa u karrali ildiz deb ataladi.

Agar f(x) funksiyani $\bar{x}$ ildizi atrofida $f(x)=(x-\bar{x})\,g(x)$ ko‘rinishda ifoda lash mumkin bo‘lsa, u holda g(x) – chegaralangan funksiya ($g(\bar{x})\neq 0$) uchun p – natural son ildizning karrasi deb ataladi. Toq p larda f(x) funksiya [a,b] kesmada ishorasini almashtiradi, ya’ni f(a) f(b)<0, juft p larda esa yo‘q.

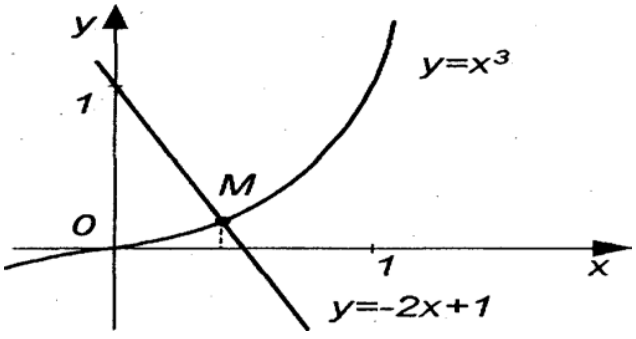


2- rasm. Algebraik tenglamalar.

1–misol. Ushbu $x^3+2x-1=0$ tenglamaning ildizlarini ajratishni ko‘ramiz.

Berilgan tenglamaning ildizini grafik usulda ajratish uchun uni $x^3=-2x+1$, ya’ni $f_1(x)=f_2(x)$ ko‘rinishda ifodalaymiz.

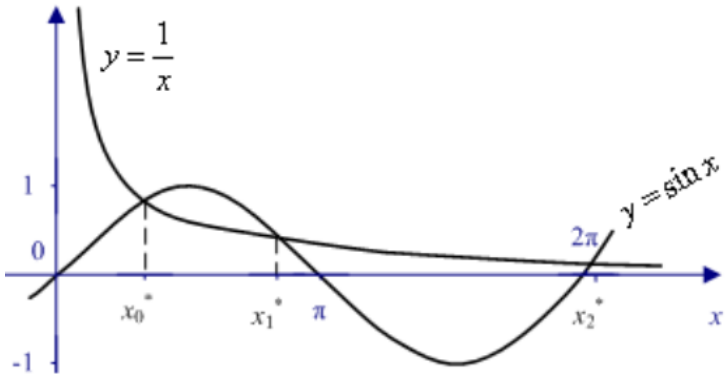
Endi $y=x^3$ va $y=-2x+1$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz. Bu grafiklar absissasi (0;1) oraliqda bo‘lgan M nuqtada kesishadi (3-rasm).



3-rasm tenglamaning ildizini grafik usulda topish.

2-misol. Ushbu $x\cdot\sin x = 1$ yoki $f(x)=x\cdot\sin x-1=0$ tenglamaning ildizlarini topingni ko‘rib chiqamiz.

$f(x)$ funksiyani $\sin x = 1/x$ ko‘rinishda ifodalab, uning ildizlarini grafik usulda aniqlaylik (4-rasm).



4-rasm. Cheksiz ko‘p ildizga ega tenglamaning ildizlarini grafik usulda ajratish

Tenglamaning ildizlari *Oy* o‘qqa nisbatan simmetrik, shu ning uchun uning faqat musbat ildizlarini qarashimiz etarli. $x*_1$, $x*_2$, … $x*_n$ larning qiymatlarini etarlicha aniqlikda hisoblashimiz mumkin, ammo $n\to\infty$ da $x*_n$ ning qiymatini aniqlab bo‘lmaydi. Shunga qaramasdan grafikdan ko‘rinadiki, $n>>1$ da $x*_n$ ildizlar $n\pi$ ga yaqin. Bu olingan qiymatlarni tenglama ildizlarining $(x*_1)^0$, $(x*_2)^0$… boshlang‘ich yaqinlashishlari qiymatlari deb qabul qilib, ildizlarni biror taqribiy usul yordamida aniqlashtirishimiz mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1.A.Abdirashidov, B.B.Aminov,A.A.Abdurashidov. Chiziqli bo‘lmagan Tenglamalarni yechishning sonli usullari. SAMARQAND – 2016

2.Abduxamidov A.U., Xudoynazarov S. Hisoblash usullaridan amaliyot va laboratoriya mashg‘ulotlari. – Toshkent: O‘qituvchi, 1995. – 240 б.

3. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad, Mathlab, Maple (Самоучитель). – М.: НТ Пресс, 2006. – 496 с.

4. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Изд- о Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 640 с.

Бахвалов Н. С., Корнев А. А., Чижонков Е. В. Численные методы. Решения задач и упражнения. – М.: Изд-во Дрофа, 2009. – 400 с.

5. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Изд-во Бином. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с.

METHODS OF SOLVING SOME PROBLEMS FROM SELECTED CHAPTERS OF GEOMETRY

Rasulova Gulnozaxon Azamovna[1], Mamadaliyeva Durdona Aminjon qizi[2]
[1]Qo'qon davlat universiteti Matematika kafedrasi dotsenti,
pedagogika fanlari bo 'yicha falsafa doktori (PhD)
rasulovagulnozahon@gmail.com, ORCID: 0009-0006-0467-563X
[2]Qo'qon Davlat Universiteti 2-bosqich talabasi
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610316

Abstract. *Methodological recommendations for solving typical problems from selected chapters of geometry are given in the article. It describes the formation of skills of students to correctly identify geometric relationships and know the results based on resourcefulness by providing methods of solving some problems.*

Keywords: *typical problems, algebraic substitution, bisector, Menelaus and Stewart's theorems.*

Annotatsiya. *Maqolada geometriya fanining tanlangan boblaridan tipik masalalar yechish uchun uslubiy tavsiyalar berilgan. Unda ayrim masalalarni yechish usullarini keltirish orqali talabalarning geometrik munosabatlarni to'g'ri aniqlash hamda natijalarni topqirlik asosida bilish malakalarini shakllantirish yoritilgan.*

Kalit so'zlar: *tipik masalar, algebraik almashtirish, bissektrisa, Menelay va Styuart teoremalari.*

Аннотация. *В статье представлены методические рекомендации по решению типовых задач из отдельных разделов геометрии. Описывается формирование у студентов навыков правильного определения геометрических соотношений и умения находить результаты на основе логического мышления и сообразительности посредством представления методов решения некоторых задач.*

Ключевые слова: *типовые задачи, алгебраическая подстановка, биссектриса, теоремы Менелая и Стюарта.*

Since the scope of geometry is a broad science, we have to choose our own way of solving geometric problems, depending on the given problem and based on its characteristics.

In general, it depends on familiarity with typical methods of problem solving, the ability to find relationships of various mathematical sentences, and ingenuity in seeing some unexpected results arising from some theorems and their combinations.

It consists of proving the sentences related to the solution of the problem and making the main and auxiliary forms related to it, determining their mutual relations, and then performing the necessary algebraic substitution and calculations.

Below are examples of such typical issues.

Issue 1. Parties a,b,c find the length of the bisector of the triangle

Solution: ABC in a triangle $AA'=l_a$ let it be

BA': $A'C=c:b$ taking into account, BA' and $A'C$ we find the length of the sections.

$BA'+A'C=a$

if we take into account that, the following result is obtained:

$BA' = \frac{ac}{b+c}$, $A'C = \frac{ab}{c+c}$.

Then according to Stewart's theorem:

$$l_a^{\,2} \cdot a = \frac{ab^2c}{b+c} + \frac{abc^2}{b+c} - \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} \cdot a .$$

After such simple substitutions

$$l_a^{\,2} = bc \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}$$

originates. Here $a+b+c=2p$, $b+c-a=2(p-a)$ assuming that:

$$l_a^{\,2} = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2} \quad \text{yoki} \quad l_a^{\,2} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

Issue 2. A circle inscribed outside the triangle (radius R)) triangle with center (sides a,b,c) find the distance between the center of gravity.

Solution: ABC triangle BC the midpoint of the side D and the distance sought

OG let it be. OBD from the triangle: $OD^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$ and $AD = m_a$, Stewart

applying the theorem:

$$OG^2 \cdot AD = OA^2 \cdot DG + OD^2 \cdot AG - AD \cdot AG \cdot DG$$

or

$$OG \cdot m = R^2 \cdot \frac{1}{3}m_a + (R^2 - \frac{a^2}{4}) \cdot \frac{2}{3}m_a - m_a \cdot \frac{1}{3}m_a \cdot \frac{2}{3}m_a,$$

ago:

$$OG^2 = \frac{1}{3}R^2 + \frac{2}{3}(R^2 - \frac{a^2}{4}) - \frac{2}{9}m^2{}_a = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9},$$

so:

$$OG = \frac{1}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2+b^2+c^2)}.$$

Issue 3. One straight line ABC of the triangle AB, AC sides and BC the continuation of the side respectively A', B', C' intersects at points. BC in relation to the middle of the side A' symmetrical A'' and CA in relation to the middle of the side B' symmetrical to a point B'' and AB relative to the middle of the side C'' points earned. That's it A'', B'', C'' prove that the points are collinear, i.e. they lie on a straight line.

Proof. According to Menelaus' theorem:

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'A} = 1.$$

Besides:

$$BA'' = A'C,\ A''C = BA',\ CB'' = B'A,$$

$$B''A = CB',\ AC'' = C'B,\ C''B = AC'.$$

That is why:

$$\frac{BA''}{A''C} \cdot \frac{CB''}{B''A} \cdot \frac{AC''}{C''B} = 1$$

from this last equality according to Menelaus' theorem A'', B'', C'' it follows that the points lie on a straight line.

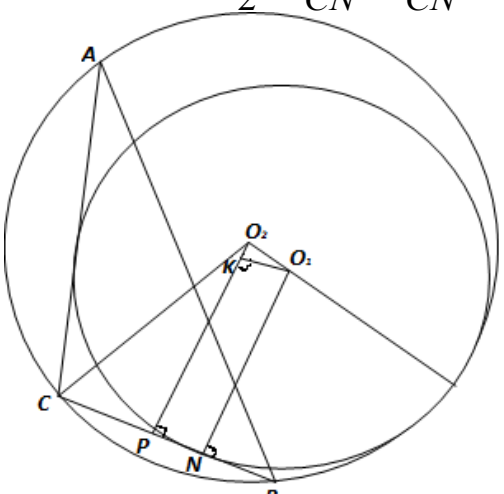
Issue 4. ABC of the triangle $CA,\ CB$ the radius of the circle trying to the sides and the circle drawn outside it r^* for

$$r^* = \frac{ab}{p}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \qquad (1)$$

prove that the equality holds. In this $a=|BC|, b=|AC|, c=|AB|$ being, p-semi-perimeter of the triangle.

Proof. ABC a triangle with obtuse angles $(\angle C > 90°)$ we prove that. ABC the center of the circle inscribed outside the triangle O_2, CA, CB and the center of the circle trying to circumscribe the triangle O_1 let it be. This is a circle AC towards N try at the point. $O_2P \perp CA$, $O_1K \perp O_2P$ we will make cuts.

$\angle A = \alpha, \quad \angle C = \gamma$ let it be. In that case $tg\frac{\gamma}{2} = \frac{O_1N}{CN} = \frac{r^*}{CN}$.



Drawing 1

Ago

$$CN = r^* ctg\frac{\gamma}{2} = r^*\frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma} = r^*\frac{1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\sin\gamma} = r^*\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2ab\sin\gamma} =$$

$$= r^*\frac{4(p-c)p}{4S_{\Delta ABC}} = r^*\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}.$$

O_1KO_2 in a triangle $O_1O_2 = R - r^*$, $O_1K = CN - CP = r^*\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}} - \frac{a}{2}$,

$O_2K = O_2P - r^* = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} - r^*$. Here R-is the radius of the circle inscribed outside the triangle. Now ΔO_1KO_2 we use the Pythagorean theorem for. $O_1K^2 + O_2K^2 = O_1O_2^2$,

$$\left(\sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} - r^*\right)^2 + \left(r^*\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}} - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(R^2 - r^*\right)^2. \qquad (2)$$

Now let's do some shape swapping:

$$1.\sqrt{R^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{R^2-R^2\sin^2\alpha}=R\left|\cos\alpha\right|=R\cos\alpha=R\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=$$

$$=R\left(\frac{(b-c)^2-a^2}{2bc}+1\right)=R\left(1-\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}\right).$$

$$2.\frac{4R(p-b)(p-c)}{bc}=\frac{abc}{S_{\Delta ABC}}\cdot\frac{(p-b)(p-c)}{bc}=a\cdot\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

(2) from

$$-2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}+r^*\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}-a\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}=-2R$$

equality is formed. From this

$$-2R\left(1-\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}\right)+r^*\frac{p(p-c)}{(p-b)(p-a)}=-2R,$$

$$\frac{4R(p-b)(p-c)}{bc}+r^*\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}-a\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}=0,$$

$$a\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}+r^*\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}-a\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}=0,$$

$$r^*\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}=a\sqrt{\frac{p-c}{p-a}}\left(\sqrt{\frac{p}{p-b}}-\sqrt{\frac{p-b}{p}}\right),$$

$$r^*=\frac{ab}{p}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

So, equality (1) holds.

Issue 5. So that α,β,γ if there are interior angles of an arbitrary triangle, then prove the $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\le\frac{9}{4}$ following inequality.

Solution: Exiting the plane from one point $\overline{r_1},\overline{r_2},\overline{r_3}$ we get unit vectors. The angles between them $2\alpha,2\beta,2\gamma$ let it be. Then this $(\overline{r_1},\overline{r_2},\overline{r_3})^2\ge 0$ according to inequality

$$3+2\cos 2\alpha+2\cos 2\beta+2\cos 2\gamma\ge 0,$$

$$3+2\left[3-2\sin^2\alpha-2\sin^2\beta-2\sin^2\gamma\right]\ge 0.$$

From the last inequality $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\le\frac{9}{4}$ originates.

REFERENCES

1. M.A.Mirzahmedov, D.Sotboldiyev. "O'quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash". Toshkent "O'qituvchi" 1993 yil.
2. Titu Andreescu, Dorin Andrica "An Introduction to Diophantine Equation". Romania "GIL Publishing House" 2002.
3. Obid Karimiy "Planimetriyadan masalalar to'plami". Toshkent "O'qituvchi" 1965 yil.

CASE STADE AND TECHNOLOGY OF USING NON-STANDARD TESTS IN TEACHING GEOMETRY MODULE

Rasulova Gulnozaxon Azamovna[1], Xasanova Shoxsanam Adxamjonovna[2]
[1]Qo‘qon davlat universiteti Matematika kafedrasi dotsenti,
pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD),
ORCID: 0009-0006-0467-563X rasulovagulnozahon@gmail.com,
[2]Qo‘qon davlat universiteti magistranti
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610344

Annotatsiya. *Oliy ta’lim muassasalarida geometriya fanidan dars beruvchi professor-o‘qituvchilar uchun talabalarning mustaqil ta’limini tashkil etishda ma’ruzalar, amaliy mashg‘ulotlar, keys-stadi bosqichlari hamda nostandart testlarni amaliy jihatdan yoritish.*

Kalit so‘zlar*: keys-stadi, nostandart test, blits-savol, ikkinchi tartibli sirtlar: ellipsoid, paraboloid, giperboloid.*

Аннотация. *Практическое освещение лекций, практических занятий, этапов кейс-стади и нестандартных тестов для преподавателей геометрии высших учебных заведений при организации самостоятельной работы студентов.*

Ключевые слова: *кейс-стади, нестандартный тест, блиц-вопрос, поверхности второго порядка: эллипсоид, параболоид, гиперболоид.*

Abstract. *Practical coverage of lectures, practical classes, case stages and non-standard tests for professors and teachers of geometry in higher education institutions in the organization of independent study of students.*

Keywords: *case-stage, non-standard test, blitz-question, second-order surfaces: ellipsoid, parabolide, hyperboloid.*

Option 1 (case-stage question). Activation of knowledge (blitz-questionnaire, think-pair-share-exchange, auction).

Keys 'main goal: To expand students' understanding of second-order surfaces, to form a broad understanding of rotating surfaces, spherical surfaces, conical surfaces, ellipsoids, parabolids, hyperboloids.

Expected results of case-based learning activities:

Learns what conical surface sections are;

Can memorize the definition and properties of an ellipsoid;

Can memorize the hyperboloid tariff and its properties;

Can memorize the definition and properties of paraboloids;

Can independently solve examples and problems related to second-order surfaces;

To successfully complete this case, students must first have the following knowledge and skills:

The student should be able to: Solve the canonical equations and properties of second-order surfaces, spheres, ellipsoids, hyperboloids and paraboloids, and examples and problems related to them;

The student should be able to: identify the nature of the problem; promotes ideas; organizes independent decision-making by critically reviewing data; has few points of view,

thinks logically and draws conclusions; works independently with educational data; compares, analyzes, and summarizes data.

Question case: 1. What do you think is the first geometric shape that a person is familiar with?

Answer: cylindrical because the wood used to build the house was cylindrical in shape. (shafts, buckets, wheel axles)

2. Give real-life examples of a spherical figure.

Answer: moon, earth, sun

3.Which field thinkers of the Awakening period developed the scientific rules and methods of spatial figures?

Answer: sculptors, architects and painters. (Leonardo da Vinci, Michelangelo)

4. What is depicted on the top of the tomb of Archimedes?

Answer: At the top of Archimedes' tomb is a sphere and a cylinder drawn inside it (the diameter of the base of the cylinder and the height of the cylinder are equal to the diameter of the sphere.

5. What about the surface of the globe?

Answer: The surface of a sphere is not flat, it is a curved surface. By placing the surface of the sphere on the edge of the ruler, we make sure that it does not overlap with the surface of the sphere in the same direction, just try on it.

6. How many axes does the ball have?

Answer: If a sphere is formed by rotating a semicircle, the axes of the sphere are very large.

Option 2 (case-stage-assignment)

Homework case. 1-Keys. Imagine second-order conical surfaces. Organize their sections with planes in an arbitrary order and explain what second-order lines are formed in the sections.

Answer: If a cone is cut with a plane not parallel to the base, an ellipse is formed from the lines of the second order in the section, if it is cut with a plane parallel to the axis of the cone, a hyperbola is formed from the lines of the second order.

2-Keys. Organize the situations of intersection of second-order surfaces with a straight line and determine what the set of solutions consists of.

Answer. When the positions of the second-order surfaces with the straight line are organized, the straight line has an asymptotic orientation with respect to the given surface, with the following cases:

a) a straight line intersects the surface at one point;

b) a straight line does not intersect with the surface at all;

c) a straight line belongs to the surface, that is, it is part of the surface and consists of its constructor;

if the straight line does not have an asymptotic orientation with respect to the second-order surface, the following 3 cases occur:

the straight line has two common points with the surface;

the straight line has two abstract common points with the surface;

the straight line has two common points that overlap with the surface.

3-Keys. The problem of the intersection of a plane with a second-order surface.

Answer: When a plane intersects a second-order surface:

when a plane intersects a second-order surface, a second-order line in the cut;

a straight line at the intersection of a plane with a second-order surface;

the surface is divided into two planes, the plane lying within one;

when a plane intersects a second-order surface, the plane with the surface does not have a single common point.

It is appropriate to work as a team on a case study, in which students work in small groups on the case:

1) coordinate different views of group members on the situation, key issues and ways to solve them;

2) discuss and evaluate the proposed options for the solution, select the most optimal option for the situation in terms of the problem posed;

3) develop a detailed step-by-step program to implement the chosen course of action leading to the solution of the problem situation;

4) prepare for the presentation and formalize the material to be presented.

Expected results of educational activities based on non-standard tests:

Learns what conical surface sections are;

- Can memorize the definition and properties of an ellipsoid;
- Can memorize the hyperboloid tariff and its properties;
- Can memorize paraboloid descriptive properties;
- Can independently solve examples and problems related to second-order surfaces;

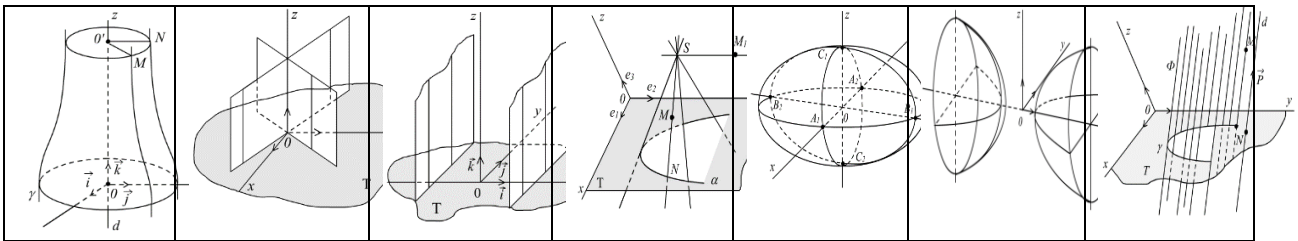
To successfully pass this non-standard test, students must first have the following knowledge and skills:

The student should be able to: Solve the canonical equations and properties of second-order surfaces, spheres, ellipsoids, hyperboloids and paraboloids, and examples and problems related to them;

The student should be able to: identify the nature of the problem; promotes ideas; organizes independent decision-making by critically reviewing data; has few points of view, thinks logically and draws conclusions; works independently with educational data; compares, analyzes, and summarizes data.

1. Place the names correctly on the geometric shapes

1) Two intersecting planes; 2) Two parallel planes; 3) Single-stage hyperboloid; 4) Cone surface; 5) Rotating surface; 6) Two-stage hyperboloid; 7) Sphere; 8) Cylindrical surface;



Answer:

5	1	2	4	7	3	6	8

2. Correctly place the names of surfaces according to geometric formulas:

1) Two intersecting planes; 2) Two parallel planes; 3) cone; 4) Parabolic cylinder; 5) elliptical cylinder; 6) hyperbolic cylinder ;

$F\left(x_0+\frac{x-x_0}{z_0-z}\cdot z_0, y_0+\frac{y-y_0}{z_0-z}\cdot z_0\right)=0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	$x^2-a^2=0$	$y^2=2px$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	

Answer:

3	1	2	4	5	6

It should be noted that the department of analytical geometry and its second-order surfaces play a key role in mathematical education, they are used as a basic tool in the acquisition of basic knowledge of algebra, mathematical analysis, computer science, linear and nonlinear programming and other sciences.

This article describes the teaching technology of the lecture on the canonical equations and properties of second-order surfaces, spheres, ellipsoids, hyperboloids and paraboloids in the science of analytical geometry. Pedagogical technology, control questions, a set of non-standard tests based on the case-stage method of this topic have been developed.

I suggest that it would be expedient to use the above-mentioned development in the development of educational technology for other subjects taught in analytical geometry.

References:

1. Dodajonov N.D., Juraeva M.Sh. Geometry. Part 1, Tashkent. "Teacher", 1996.
2. Ishmuhammedov R., Abduqodirov A.A., Pardaev A. Innovative technologies in education (practical recommendations for teachers of educational institutions) - T .: "Talent" Foundation, 2008. - 180 p.
3. «Mathematical Literacy for Humanists» Herbert Gintis. USA, p.p.23-30.
4. Geometry Holme, A. Springer, Germany pp / 317-324
5. http: // www.a-geometry.narod.ru

HƏCMLƏRİN HESABLANMASI PROSESİNDƏ PLANIMETRİYA MATERİALLARININ MÖHKƏMLƏNDİRİLMƏSİ

Rzayev Musa Tapdıq oğlu
Pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru, baş müəllim
Aərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610364

Xülasə. *Məqalədə fəza fiqurlarının sahəsinin və həcminin planımetriya materialları əsasında şagirdlərə öyrədilməsi əsas məqsəd kimi qarşıya qoyulub. “Həndəsə” məzmun xəttinə daxil olan fəza fiqurlarının həcmlərinin hesablanması fəndaxili əlaqələrdən istifadə edilərək şagirdlərə çatdırılması əvvəl əldə olunan biliklərdən asılıdır. Həcmələrin hesablanması prosesində planimetriya materiallarının möhkəmləndirilməsi, əsasən müstəvi fiqurların sahələrinin düzgün qavranılması və onların fəza fiqurlarına tətbiqi ilə bağlıdır. Planimetriya müstəvidə yerləşən fiqurların (üçbucaq, düzbucaqlı, dairə və s.) sahələrinin öyrənilməsini əhatə edir və bu biliklər fəza cisimlərinin həcmini hesablamaq üçün baza rolunu oynayır. Fəza fiqurları–yəni üçölçülü “Həndəsi cisim”lər–müxtəlif formalarda olur: prizma, piramida, konus, kəsik konus, və kürə. Bu cisimlərin həcmləri onların əsas sahələri və hündürlükləri vasitəsilə müəyyən edilir.*

Fəza fiqurlarının həcmlərinin hesablanması və mənimsənilməsi üçün planimetriyadan sahə düsturlarını bilmək vacibdir. Burada sahə və həcm anlayışlarının bir-biri ilə əlaqəsi əsas rol oynayır. Daha mürəkkəb fiqurların, kürə seqmentinin və ya qeyri-müntəzəm cisimlər üçün İnteqral üsulu tətbiq olunur. Bu yanaşma sahələrin sonsuz kiçik hissələrə bölünərək toplanması prinsipinə əsaslanır. Deyilən məsələlər nümunələr əsasında praktik olaraq izah edilir.

Аннотация. *В статье поставлена основная цель обучения студентов площади и объему пространственных фигур на основе планиметрических материалов. Расчет объемов пространственных фигур, включенных в содержание курса «Геометрия», зависит от ранее полученных знаний с использованием внутрипредметных соотношений. Закрепление планиметрических материалов в процессе расчета объемов в основном связано с правильным восприятием площадей плоских фигур и их применением к пространственным фигурам. Планиметрия включает изучение площадей фигур, расположенных на плоскости (треугольник, прямоугольник, круг и т. д.), и эти знания играют основополагающую роль в расчете объема пространственных объектов. Пространственные фигуры-то есть трехмерные«геометрические объекты»-бывают различных форм: призма, пирамида, конус, усеченный конус и сфера. Объемы этих объектов определяются их основными площадями и высотами.*

Для расчета и освоения объемов пространственных фигур важно знать формулы площади из планиметрии. Здесь ключевую роль играет взаимосвязь между понятиями площади и объема. Для более сложных фигур, сферических сегментов или объектов неправильной формы применяется интегральный метод. Этот подход основан на принципе деления площадей на бесконечно малые части и их суммирования. Вышеуказанные вопросы объясняются на практике на примерах.

Abstract.*The article sets the main goal of teaching students the area and volume of spatial figures based on planimetry materials. The calculation of the volumes of spatial figures*

included in the "Geometry" content line depends on the previously acquired knowledge, using intra-subject relationships. The consolidation of planimetry materials in the process of calculating volumes is mainly related to the correct perception of the areas of plane figures and their application to spatial figures. Planimetry involves the study of the areas of figures located on a plane (triangle, rectangle, circle, etc.), and this knowledge plays a basic role in calculating the volume of spatial objects. Spatial figures-that is, three-dimensional "Geometric objects"-come in various shapes: prism, pyramid, cone, truncated cone, and sphere. The volumes of these objects are determined by their basic areas and heights.

To calculate and master the volumes of spatial figures, it is important to know the area formulas from planimetry. Here, the relationship between the concepts of area and volume plays a key role. For more complex figures, spherical segments, or irregular objects, the Integral method is applied. This approach is based on the principle of dividing areas into infinitely small parts and adding them together. The above issues are explained practically based on examples.

***Açar sözlər**: Fəza fiquru, məsələ, sahə və həcm, həcmlərin hesablanması, həndəsi cisim, planımetriya, piramida, konus, kəsik konus, kürə, seqment, inteqral, teorem, isbat.*

***Ключевые слова**: пространственная фигура, задача, площадь и объем, вычисление объемов, геометрическое тело, планиметрия, пирамида, конус, усеченный конус, сфера, отрезок, интеграл, теорема, доказательство.*

***Keywords**: Spatial figure, problem, area and volume, calculation of volumes, geometric body, planimetry, pyramid, cone, truncated cone, sphere, segment, integral, theorem, proof.*

Orta ümumtəhsil məktəblərində aparılan islahatlar və riyaziyyat təlimində tətbiq edilən fənn kurikulumunun qarşısında bir sıra vəzifələr qoymuşdur. Bunlardan biri də "Həndəsə" məzmun xəttinin alt standartlarına daxil olan fəza fiqurları və onların həcmlərinin öyrədilməsi məsələsidir.

Fənn kurikulumu əsasında tərtib edilmiş riyaziyyat dərsliklərinin təhlilindən aydın olur ki, ənənəvi proqramlardan fərqli olaraq tədqiqatçılıq nöqteyi-nəzərdən fəza fiqurlarının həcmlərinin tədrisi inteqral və diferensial hesabı ilə verilmişdir. Bu dərsliklərlə işlərkən steremoteriyanın tədrisi prosesində planımetriya materiallarının möhkəmləndirilməsi üçün bir sıra imkanlar yaranır. Fəza fiqurlarının həcmlərinin hesablanması zamanı planımetriya materiallarının möhkəmləndirilməsi üçün aşağıdakı imkanlardan istifadə oluna bilər: a) Çertyojların dəqiq çəkilişi zamanı; b) Məsələ (qurma, isbat və hesablama) zamanı; c) Nəzəri materialın tədrisi prosesində.

Fəza fiqurlarının həcmini hesablayarkən müəyyən inteqraldan istifadə etmək olar. Ümumi şəkildə elə düsturdan istifadə etmək olar ki, həmin düstur vasitəsi ilə piramidanın, konusun, kəsik konusun, kürə seqmenti və kürənin həcmini hesablamaq üçün müvafiq riyazi düsturları çıxararkən planimetriya materiallarını möhkəmləndirmək mümkün olsun.

Qeyd edilən fəza fiqurlarının hündürlüyünü H ilə işarə edib, bu cisimlərin oturacaqlarını paralel müstəvi ilə kəsək. Həmin cisimlərin təpəsindən kəsik müstəvisinə qədər olan məsafəsi x olsun və eyni zamanda qeyd edək ki, x-in $[0,H]$ parçasından götürülmüş qiymətində təyin edilmişdir. Kəsiyin sahəsini $S(x)$ həcmini isə $V(x)$ ilə işarə edək.

İstər kəsiyin sahəsi, istərsə də həcm x arqumentinin funksiyalarıdırlar. Eyni zamnda yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, sahə və həcm x-in $[0,H]$ parçasından götürülmüş qiymətində təyin edilmişdir. x-ə Δx-ə artımı versək, onda $V(x)$ həcmində ΔV artımını alar. ΔV-verilən

cismin kiçik hissəciyinin həcmidir. Aşkardır ki, yuxarıda adlarını çəkdiyimiz cisimlərin həcmləri üçün:

$$S(x)\cdot\Delta x < \Delta V < S(x+\Delta x)\cdot\Delta x \quad (1)$$

bərabərsizliyi ödənməlidir.

Buradan,

$$S(x) < \frac{\Delta V}{\Delta x} < S(x+\Delta x) \quad (2)$$

olduğu aşkardır. Onda (2) bərabərsizliyindən çıxır ki, $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}S(x)$.

Deməli, $V(x)$ funksiyasının törəməsi $V'(x)=S(x)$-dir. Yəni $V(x)$ həcmi $S(x)$ kəsik sahəsinin ibtidai funksiyasıdır. Bütün verilmiş cismin həcmi üçün $x=H$ olduqda $V=V(H)$ olur.

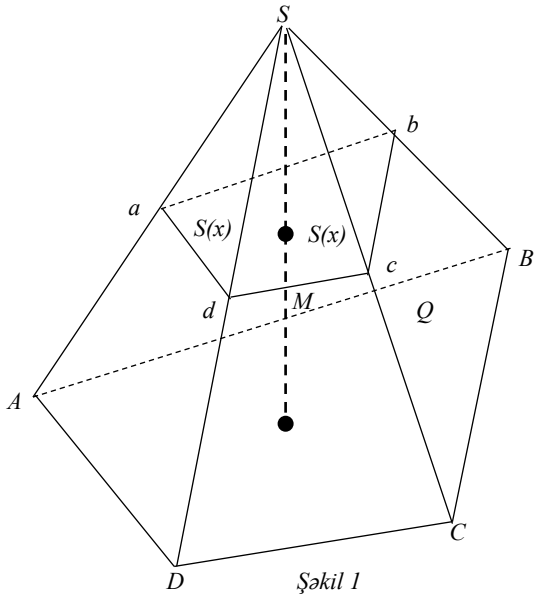
Bildiyimiz kimi, cisim sol yarımseqmentdə $V(0)=0$ qiymətini aldığına görə $V=V(H)-V(0)$ yazmaq olar.

Beləliklə, ibtidai funksiya üçün:

$$V=\int_0^H S(x)dx \quad (3)$$

ümumi formulunu ala bilərik.

Beləliklə, tam və kəsik piramida və konus, eləcə də kəsikdə və kürə seqmentinin həcmi (3) düsturu ilə ifadə edilə bilər. İndi həmin düstur vasitəsi ilə piramidanın həcminin düsturunu çıxardaq.



Şəkil 1

$SABCD$ piramidasının oturacağına paralel $abcd$ müstəvisi ilə kəsək. Piramidanın oturacağının sahəsini Q ilə, kəsiyin sahəsini $S(x)$ ilə işarə edək. Piramida oturacağının təpədən olan məsafəsini H, kəsiyin təpədən olan məsafəsini X ilə işarə edək.

Piramidanın paralel kəsiklərinin xassəsindən məlumdur ki, piramidanın oturacağına paralel müstəvi ilə kəsdikdə, kəsiyin və oturacağının sahələri nisbəti onların təpədən olan məsafələrinin kvadratı ilə düz mütənasibdir (şəkil 1). Yəni,

$$\frac{S(x)}{Q}=\frac{x^2}{H^2}\Rightarrow S(x)=\frac{Q}{H^2}\,x^2 \quad (4)$$

Qeyd edildiyi kimi, $S(x)$ kəsilməyən funksiya olduğundan. Onda $S(x)$-in qiymətini (3) düsturunda yerinə yazıb inteqrallasaq:

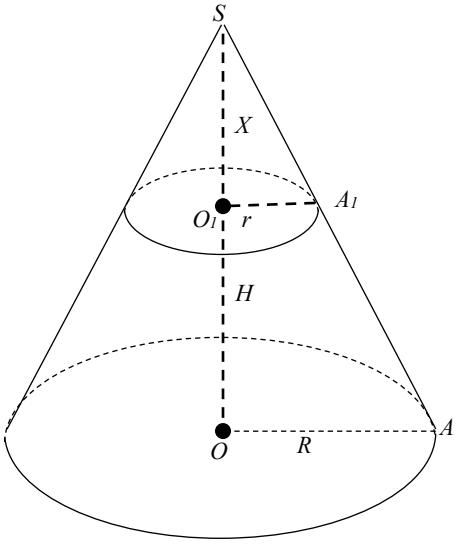
$V=\int_0^H S(x)dx=\int_0^H \frac{0}{H^2}x^2dx=\frac{0}{H^2}\int_0^H x^2dx=\frac{0}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H=\frac{0}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3}=\frac{1}{3}Q\cdot H$ alarıq.

Deməli, piramidanın həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinin üçdə birinə bərabərdir. $V=\frac{1}{3}Q\cdot H$. Burada, Q-piramidanın oturacağının sahəsi, H-hündürlüyü, V-isə həcmidir.

Həmin qayda ilə piramidanın paralel kəsiklərinin xassələrindən istifadə edərək kəsik piramidanın həcmi üçün də lazım olan düsturu çıxaraq.

Konus və kəsik konusun həcmini ifadə edən düsturu çıxaran zaman planımetriyadan dairə sahəsini və ona aid şagirdlərin məsələ həlli vərdişini daha da möhkəmlətmək lazımdır.

Fərz edək ki, oturacağının radiusu R, hündürlüyü H olan bir konus verilmişdir. Bu konusun təpədən x məsafədə oturacağa paralel müstəvi ilə kəsək (şəkil 2). Kəsiyin radiusunu $r(x)$ ilə işarə edək. Bu zaman SOA və SO_1A_1 üçbucaqlarının oxşarlığından aşağıdakı həndəsi tənasübü yazarıq: $\frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1A_1}{OA}$ və ya $\frac{x}{H} = \frac{r(x)}{R}$ olar. Buradan, $r(x) = \frac{R}{H}x$ alarıq.



Şəkil 2

Yuxarıda çoxüzlülər və fırlanma cisimlərin həcmləri üçün ümumi şəkildə çıxarılan (3) düsturunda $S(x)$-in kəsiyin sahəsini ifadə etdiyini bilirik.

Bunu dairə sahəsi üçün nəzərə alsaq: $S(x) = \pi r^2(x) \quad (*)$ olar.

Digər tərəfdən konus üçün $r(x) = \frac{R(x)}{H}$ olduğunu bilirik. $r(x)$-in bu qiymətini $(*)$ düsturda nəzərə alsaq: $S(x) = \pi \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot x^2$ ifadəni həcm düsturunda yerinə yazsaq və $[0, H]$ seqmentində inteqrallasaq:

$$V = \int_0^H S(x)dx = \int_0^H \pi \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot x^2 dx = \pi \cdot \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$$

Deməli, $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$-dır.

Beləliklə, isbat edtdik ki, konusun həcmi oturacaqdakı dairənin sahəsi ilə hündürlüyü hasilinin üçdə birinə bərabərdir. Həmin qayda ilə kəsik konus üçün: $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ düsturunu alarıq. Burada πR^2 kəsik konusun alt, πr^2 isə üst oturacaqdakı dairənin s ahəsini ifadə edir. πRr isə alt və üst oturacağın sahələri arasında həndəsi orta kəmiyyətdir.

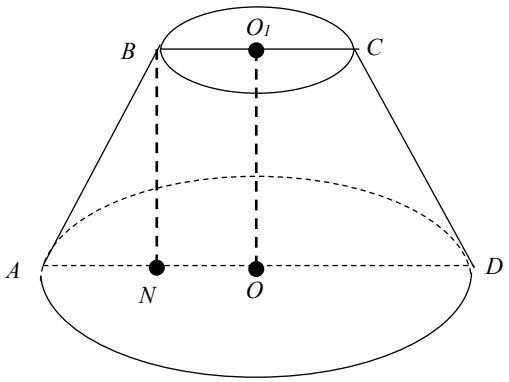
Məsələ: Kəsik konusun oturacaqlarının radiusları R və r-dir. Konusun doğuranı oturacaqla 45^0-li bucaq əmələ gətirir. Həcmini tapın (şəkil 3).

Həlli. Verilir:
$AO = R, BO_1 = r, \angle BAO = \alpha = 45^0, V_k = ?$

Kəsik konusun həcmini ifadə edən düsturu aşağıdakı kimidir:

$$V_k = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) \quad (1)$$

Konusun üst oturacağındakı B təpəsindən konusun hündürlüyünə bərabər və paralel olaraq AD oturacağına perpendikulyar düz xətt çəkək. Şəkildən göründüyü kimi $BNOO_1$ düzbucaqlısı alınır. Buradan göründüyü kimi, $BO_1 = NO_1 = r$ və $BN = OO_1 = H$-dır. Onda $AN = R - r$ olar.



Şəkil 3

Digər tərəfdən düzbucaqlı BAN üçbucağından:

$BN \cdot AN = tg\alpha; BN = AN \cdot tg\alpha = (R-r)tg\alpha;$

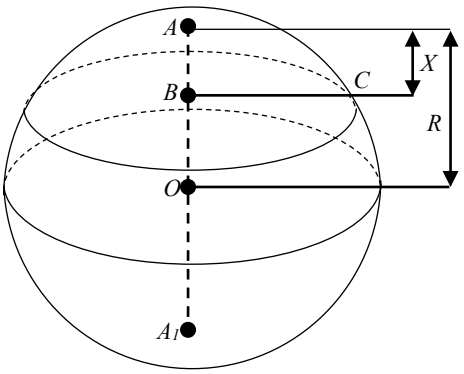
$BN = H = (R-r)tg\alpha; H = (R-r)tg\alpha$

H-ın sonuncu ifadəsini (1)-düsturunda yerinə yazsaq:

$$V_k = \frac{\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) \cdot H = \frac{\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) \cdot (R-r)tg\alpha = \frac{\pi}{3}(R^3 - r^3) \cdot tg\alpha$$

$V_k = \frac{\pi}{3}(R^3 - r^3) \cdot tg\alpha$ alarıq.

Qeyd edək ki, planimetriya dair bəzi mühüm məsələləri kürənin və kürə seqmentinin, eləcə də kürə hissələrinin həcmlərinin hesablayan zaman daha çox möhkəmləndirmək olar.



Şəkil 4

Kürənin müstəvi ilə hər hansı kəsiyi dairədir. Radiusu R-ə bərabər olan yarım kürəyə baxaq. Həmin kürəni oturacağına paralel müstəvi ilə kəsək. Kəsiyin təpədən olan məsafəsini x, dairənin radiusunu isə $r(x)$ ilə işarə edək (şəkil 4).

Planimetriyadan bildiyimiz məlum teoremə əsasən $CB^2 = AB \cdot BA_1$-dir. Bunu bərabərlikdə nəzərə alsaq $r^2(x) = x(2R - x)$ olar.

Deməli, kəsiyin $S(x)$ sahəsi:

$S(x) = \pi r^2(x) = \pi(2R - x)$-dir.

$S(x)$-in bu qiymətini həcm düsturunda yerinə yazsaq:

$$V = \int_0^R S(x)dx = \int_0^R \pi x \cdot (2R - x)dx = \pi(2R\frac{x^2}{2}\Big|_0^R - \frac{x^3}{3}\Big|_0^R = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi R^3$$

olar. Beləliklə, $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ alarıq.

Kürənin həcmi isə səthi ilə radiusu hasilinin üçdə dördünə bərabər olduğuna görə:

$$V_{kür.} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

İndi də hündürlüyü kürənin radiusundan kiçik olan $(H < R)$ kürə seqmentinin həcmini hesablayaq. Daha doğrusu kürə seqmentinin həcmini ifadə edən: $V_k = \frac{\pi}{3}H^2(3R - H)$ düsturunu planimetriya materialları vasitəsi ilə çıxaraq. Planimetriyadan məlumdur ki, iki radius və qövs ilə əhatə olunan dairə hissəsinə dairə sektoru deyilir.

Dərslikdə verilən teoremləri və onların isbatını şagirdlərə əzbərlətmək yox, tədqiqatçılıq metodundan istifadə edərək öyrətmək lazımdır. Çünki əzbərlənmiş teorem və isbatdan məsələ həlli prosesində istifadə etməkdə çətinlik çəkirlər. Bunun da bir çox səbəbləri vardır. Bunları aşağıdakı göstərilənlər ilə izah etmək olar.

a) şagirdlərə aşağı siniflərdə həndəsi təsəvvürlər aşılanmır.

b) həndəsənin hesabla birlikdə (V sinifdə ölçmə, sahələrin hesablanması və s.) verilən hissəsi şagirdlərə zəif öyrədilir.

c) bu sahədə bəzi müəllimlər də səhvə yol verirlər. Çünki onlar bir qayda olaraq eyni məsələləri həll etdirirlər. Riyaziyyatın başqa sahələrindən fərqli olaraq həndəsə fənni bildiyimiz kimi əyaniliyi çox tələb edir. Bunun üçün şagirdlər lazım olan bütün düstur-teorem, tərif və qaydaları bilməlidir. Həndəsə fənninə və məsələ həllinə əsasən aşağıdakı tələblər verilir.

Məsələnin həllinə ad vermək.

b) şərtə uyğun dəqiq şəkil çəkmək.

c) məsələnin şərti və verilənlər araşdırmaq.

ç) məsələni əvvəlcə ümumi şəkildə həll etməli.

d) bəzi məsələlərin lazım gəldikdə həllini təhlil etmək.

Bildiyimiz kimi həndəsədə hər bir mövzu və bəhsin özünə aid məsələlərin həlli xüsusiyyətləri vardır. Belə ki, orta məktəbin yuxarı siniflərində kürələr və onların səthlərinin hissələrinin hesablanmasına aid məsələ həlli vacib məsələlərdən biridir. Bunun üçün məsələ həllində aşağıdakılar nəzərə alınmalıdır.

a) şagirdlərə planimetriyadan çevrə və dairə bəhsinə aid bilikləri təkrar etdirmək.

b) düz xətlə müstəvinin və müstəvi ilə müstəvinin, çoxüzlü ilə müstəvinin kəsiklərini təkrar etmək.

c) şagirdlərin rəsmxətdən aldıqları bilikləri təkrar etmək.

ç) silindir, konus və kürənin müstəvi ilə kəsilməsi haqqında bəzi şəkilləri çəkməklə planimetriya materiallarını möhkəmləndirmək.

d) müstəvi çoxüzlülər və yuvarlaq cisimlər eləcə də səth və həcmləri ardıcıl təkrar edib möhkəmləndirmək.

Göründüyü kimi stereometriyanın tədrisi prosesində yuxarıda deyilənlərə əməl edilərsə planimetriya materialının möhkəmləndirilməsi üzrə işin nəticəsi müvəffəqiyyətli olur.

İSTİFADƏ EDİLMİŞ ƏDƏBİYYAT

1. Adıgözəlov A.S., Əliyeva T.M., Quliyev A. Rzayev M.T., İ., Qardaşova, Z.Ş. Elementar riyaziyyat (Dərs vəsaiti). ADPU-nun nəşri., Bakı, 2018.
2. Rzayev M.T. Dairə və onun hissələrinin sahəsi bəhsi üzrə isbata aid məsələlərin həlli. Konfrans materialı. Sumqayıt, 25-26 aprel 2023-cü il.
3. Rzayev M.T. Methodology of teachıng the volume of pyramıd and truncated pyramıd. Международный научный журнал “Tndless light in science” Астана, Казахстан. 31 января 2026
4. Əsgərov K.S., Adigözəlov A.S., Məmmədov A.A. "Həndəsədən məsələ həlli praktikumu" (Dərs vəsaiti). Bakı, V.İ.Lenin adına APİ, 1986
5. Литвиненко В.Н. "Сборник задач по стереометрии с методами решений". Пособие для учащихся. М., Просвещение, 1998.
6. Певзнер С.Л., Проективная геометрия. Учебное пособие по курсу геометрия для студентов-заочников. М., Просвешение, 1980.

LIMITLARNI HISOBLASHDA FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGIDAN FOYDALANISH

X.B.Tadjimatova[1], M.A.Maxkamova[2], M.Abdusamatova[3]
[1]pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori, PhD QDU,
[2]oliy toifali matematika o‘qituvchi, Farg‘ona viloyati O‘zbekiston tumani 47-umumiy o‘rta ta'lim maktabi, [3]talaba, QDU
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610449

Annotatsiya. *Ushbu maqolada matematik analizning fundamental tushunchalaridan biri bo‘lgan funksiya uzluksizligining limitlarni hisoblashdagi amaliy ahamiyati tadqiq etiladi. Maqolada murakkab funksiyaning limiti haqidagi teorema asosida limit ishorasi ostidan funksiya ishorasi ostiga o‘tish qoidasi batafsil bayon etilgan. Shuningdek, ko‘rsatkichli, logarifmik va darajali funksiyalarning uzluksizligi xossasidan foydalanib, muhim limitlar hamda darajali-ko‘rsatkichli ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochish usullari aniq misollar orqali ko‘rsatib berilgan.*

Kalit so‘zlar: *limit, uzluksizlik, murakkab funksiya, limit nuqta, aniqmasliklar, muhim limitlar, darajali-ko‘rsatkichli funksiya.*

Ma’lumki, funksiyalarning limitlarini hisoblash muhim, shu bilan birga anchagina mashaqqatlidir.

Funksiyalarning uzluksiz bo‘lishi esa, ular limitini topishda qo‘l keladi.

$y=f(x)$ funksiya $X\subset R$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, a nuqta X ning limit nuqtasi bo‘lsin. $z=\phi(y)$ funksiya esa $Y\subset R$ to‘plamda aniqlangan. Bu funksiyalar yordamida $z=\phi(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo‘lsin.

Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=y_a$ mavjud bo‘lib, $z=\phi(y)$ funksiya y_a nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}\phi(f(x))$ mavjud va $\lim\limits_{x\to a}\phi(f(x))=\phi(y_a)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Haqiqatan, $x\to a$ da $f(x)\to y_a$ va $\phi(y)$ funksiya y_a nuqtada uzluksiz. Ya’ni $y\to y_a$ da $\phi(y)\to\phi(y_a)$. U holda murakkab funksiyaning limiti haqidagi teoremaga asosan $x\to a$ da $\phi(f(x))$ funksiya limitga ega va

$$\lim_{x\to a}\phi(f(x))=\lim_{y\to y_a}\phi(y)=\phi(y_a)$$

tengliklar o‘rinli. Bu tengliklardan uzluksiz funksiyalar uchun funksiya ishorasi ostida limitga o‘tish qoidasi kelib chiqadi:

$$\lim_{x\to a}\phi(f(x))=\phi(\lim_{x\to a} f(x))$$

Xususan, $f(x)=x$ bo‘lsa,

$$\lim_{x\to a}\phi(x)=\phi(\lim_{x\to a} x)=\phi(a)$$

Misollar. 1. Quyidagi $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mu x)^{\frac{1}{x}}$, $0\neq\mu\in R$ limitni hisoblang. Biz buni

$$\lim_{x\to 0}(1+\mu x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+\mu x)^{\frac{1}{\mu x}}\right]^{\mu}$$

ko‘rinishda yozib olamiz. Ravshanki, $x \to 0$ da $y = \mu x \to 0$ bo‘ladi. Bundan quyidagini topamiz:

$$\lim_{x\to 0}\left[(1+\mu x)^{\frac{1}{\mu x}}\right]^{\mu} = \lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{\mu} = e^{\mu}$$

Shu misoldan foydalanib, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$ limitni ham hisoblash mumkin. Unda $0 \neq x \in R$. Ravshanki, $\frac{x}{n} \in R$ da va $n \to \infty$ da $\frac{x}{n} = y \to 0$. SHuning uchun,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = \lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{x} = \lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{x} = e^{x}$$

2. Quyidagi limitlarni hisoblang:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$

(birinchi muhim limit, $a>0,\ a=1$).

b) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$

(ikkinchi muhim limit, $a>0,\ a=1$).

s) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha$

(uchinchi muhim limit).

Bu munosabatlarni isbotlashda logarifmik, ko‘rsatkichli va darajali funksiyalarning uzluksizligidan foydalanamiz. Darhaqiqat,

a) holda $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log_a e$;

b) holda esa $a^x - 1 = t$ deb, $x \to 0$ da $t \to 0$ bo‘lishini etiborga olib, ushbuni topamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\log_a\left[\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a\ ;$$

Nihoyat, c) holda $(1+x)^{\alpha}-1 = t$ deb, so‘ngra $\alpha = \frac{\ln(1+t)}{\ln(1+x)}$ va $x \to 0$ va $t \to 0$ bo‘lishini hisobga olsak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{t}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\frac{\ln(1+t)}{\ln(1+x)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\right] = \alpha$$

kelib chiqadi.

3. Ikkita $f(x)$ va $g(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda aniqlangan. a nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin.

Agar

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \ \ (b>0), \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = c$

limitlar o‘rinli bo‘lsa, ushbu

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)} = b^c$$

limit ham o‘rinli bo‘ladi. Haqiqatan, $\left[f(x)\right]^{g(x)}$ funksiyani $\left[f(x)\right]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ ko‘rinishda ifodalab, so‘ngra ko‘rsatkichli hamda logarifmik funksiyalarning uzluksizligidan foydalanib, quyidagini topamiz:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\cdot \ln f(x)\right]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\left[\ln \lim\limits_{x\to a} f(x)\right]} = e^{c\ln b} = e^{\ln b^c} = b^c$$

Odatda $\left[f(x)\right]^{g(x)}$ funksiya darajali-ko‘rsatkichli funksiya deb ataladi, darajali-ko‘rsatkichli $\left[f(x)\right]^{g(x)}$ funksiya quyidagi

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, $\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;

hollarda aniqmasliklarni ifodalaydi. $x\to a$ da $\left[f(x)\right]^{g(x)}$ funksiya

holda 1^{∞}, 2) holda 0^0, 3) holda ∞^0 ko‘rinishdagi aniqmasliklar deyiladi.

Misol. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \ \ (a>0,\ b>0)$ limitni hisoblang.

$\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ ifoda $x\to 0$ da 1^{∞} ko‘rinishdagi aniqmaslikdan iborat. Uni ochish uchun limit ishorasi ostidagi funksiyani qulay ko‘rinishda yozib olib, keyin limitga o‘tamiz:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\left[\frac{(a^x-1)+(b^x-1)}{2}+1\right]^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+0}\left\{\left[1+\frac{(a^x-1)+(b^x-1)}{2}\right]^{\frac{2}{(a^x-1)+(b^x-1)}}\right\}^{\frac{a^x-1+b^x-1}{2x}} =$$

$$= \left\{\lim_{x\to+0}\left[1+\frac{(a^{`x}-1)+(b^x-1)}{2}\right]^{\frac{2}{a^x-)+b^x-1}}\right\}^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{a^x-1+b^x-1}{2x}} =$$

$= e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)} = \sqrt{ab}$

Demak, $x \to 0$ da berilgan funksiyaning limiti $\sqrt{ab}$ ga teng.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1.T.Azlarov., H.Mansurov “Matematik analiz”. Toshkent. 1986-yil.
2.G.Xudoyberganov, A.Voriyev, X.Mansurov, B.Shoimqulov “Matematik analizdan ma’ruzalar”. Toshkent. 2010-yil.
3.T.Azlarov., M.Miraxmedov, D.Otaqo‘ziyev, M.Sobirov, S.To‘laganov. “Matematikadan qo‘llanma”. II. Toshkent. 1990-yil.
4.A.Sa’dullayev, H.Mansurov, G.Xudoyberganov, A.Vorisov, R.G‘ulomov. “Matematik analiz.
5.B.M.Mamadaliyev. “Matematik analiz” (funksiyani to‘la tekshirish) 2024-y

DESCRIPTION OF LOCAL AND 2-LOCAL INNER DERIVATIONS OF FIVE-DIMENSIONAL JORDAN ALGEBRAS

F. S. Urinboyev[1], Urinboyeva Mushtariybonu[2], Isaqova Bibirobiya[3]
[1]Kokand State University
Faculty of Exact Sciences and Engineering
Teacher of the Department of Mathematics
[2,3] First year students
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610498

Abstract. *In this article we studied and described inner derivations, local and 2-local inner derivations of five-dimensional nilpotent non-associative Jordan algebras. We also gave a criterion of a linear operator on these Jordan algebras to be a local inner derivation.*

Key words: *Jordan algebra, derivation, local derivation, inner derivation, local inner derivation, nilpotent algebra.*

Introduction. Jordan algebras are classical algebras widely studied by specialists. Jordan algebras turned out to be related to other classical algebras such as associative algebras and Lie algebras. The classification of finite-dimensional Jordan algebras is one of the primary areas of modern algebra and, as is known, was first studied by P. Jordan, J. von Neumann and E. Wigner [1]. Classifications of 3- and 4-dimensional Jordan algebras were given by I. Kashuba and M.E. Martin in [2] and M.E. Martin in [3], respectively. Moreover, nilpotent Jordan algebras of dimension five were classified by Hegazy and Abdlwahab [4]. Most classification problems for finite-dimensional Jordan algebras have been studied in order to establish certain properties of Jordan algebras, while the complete classification of Jordan algebras in general is still an open problem. There are many theoretical works on derivations and inner derivations of associative and Lie algebras, see [5], [6], [7] and [8] respectively. However, in the case of Jordan algebras, there are few of them. For this reason, our interest in this article lies in the study and description of inner derivations of five-dimensional Jordan algebras.

In the present article, we study local derivations of five-dimensional Jordan algebras. The concept of local derivation goes back to the Gleason-Kahane-Zelazko theorem, which is a fundamental contribution to the theory of Banach algebras. This theorem asserts that every unital linear functional F on a complex unital Banach algebra A such that $F(a)$ belongs to the spectrum $\sigma(a)$ of the operator a for every $a \in A$, is multiplicative (cf. [9], [10]). In modern terminology, this is equivalent to the following condition: any unital linear local homomorphism from a unital complex Banach algebra A to the field $\mathbb{C}$ of complex numbers is multipl icative. Recall that a linear mapping T from a Banach algebra A to a Banach algebra B is called a local homomorphism if for every a in A there exists a homomorphism $\Phi_a: A \to B$, depending on a such that $T(a) = \Phi_a(a)$.

A similar notion was introduced and studied to characterize derivations on operator algebras. Namely, the concept of local derivations was introduced by R. Kadison [11] and D. Larson, A. Surur [12] independently in 1990. A linear mapping ∇ of an algebra A into itself is a local derivation if for each a in A there exists a derivation D_a on A such that $D_a(a) = \nabla(a)$.

1 Preliminary information

In this section, we provide the necessary terminology and notations that will be needed to present this scientific work.

Definition. A Jordan algebra $\mathcal{J}$ is a vector space over a field F equipped with a bilinear operator $\cdot: \mathcal{J} \times \mathcal{J} \to \mathcal{J}$, satisfying the following identities:

$$x \cdot y = y \cdot x, (x^2 \cdot y) \cdot x = x^2 \cdot (y \cdot x) (1)$$

for any x, $y \in \mathcal{J}$. An important special case of mappings is the so-called "derivation". In this section, we introduce the notion of inner derivations of Jordan algebras and give their properties.

Let $\mathcal{J}$ be a Jordan algebra. Recall that a linear map $D: \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ is called a derivation if $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ for any two elements x, $y \in \mathcal{J}$.

A linear mapping $\nabla: \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ is called a local derivation if for every $x \in \mathcal{J}$ there exists a derivation $D: \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ such that $\nabla(x) = D(x)$.

A map $\Delta: \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ is called a 2-local derivation, if for any two elements x, $y \in \mathcal{J}$ there exists a derivation $D_{x,y}: \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ such that $\Delta(x) = D_{x,y}(x)$, $\Delta(y) = D_{x,y}(y)$.

2 Inner derivations and local inner derivations on five-dimensional nilpotent non-associative Jordan algebras

In this section, we describe inner derivations of the five-dimensional Jordan algebras in Table 1. The following theorem takes place.

Theorem: *Inner derivations and local inner derivations of the five-dimensional nilpotent non-associative Jordan algebras are described as in the following table:*

Table 1. Inner derivations and local inner derivations on five-dimensional nilpotent non-associative Jordan algebras.

$\mathcal{J}$	General form of a inner derivation	General form of a local inner derivation	Is each local inner derivation a inner derivation?	Is each 2-local inner derivation a inner derivation?
$\mathcal{J}_1$	$\{E_{3,1}\}$	$\{E_{3,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_2$	$\{E_{3,1} + E_{3,4}\}$	$\{E_{3,1}, E_{3,4}\}$	−	+
$\mathcal{J}_3$	$\{E_{3,1} + E_{3,4}\}$	$\{E_{3,1}, E_{3,4}\}$	−	+
$\mathcal{J}_4$	$\{E_{3,4}\}$	$\{E_{3,4}\}$	+	+
$\mathcal{J}_5$	$\{E_{5,1}\}$	$\{E_{5,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_6$	$\{E_{5,1}\}$	$\{E_{5,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_7$	$\{E_{5,1}, E_{5,2}\}$	$\{E_{5,1}, E_{5,2}\}$	+	−
$\mathcal{J}_8$	$\{E_{5,1}, E_{5,2}\}$	$\{E_{5,1}, E_{5,2}\}$	+	−
$\mathcal{J}_9$	$\{E_{5,1}, E_{5,2}\}$	$\{E_{5,1}, E_{5,2}\}$	+	−
$\mathcal{J}_{10}$	$\{E_{5,1} - E_{5,2}\}$	$\{E_{5,1} - E_{5,2}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{11}$	$\{E_{5,1}\}$	$\{E_{5,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{12}$	$\{E_{5,1}\}$	$\{E_{5,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{13}$	$\{E_{5,1} - E_{5,2}\}$	$\{E_{5,1} - E_{5,2}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{14}$	$\{E_{5,1}\}$	$\{E_{5,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{15}^{\alpha}$	$\{E_{5,1}\}$	$\{E_{5,1}\}$	+	+

$\mathcal{J}_{16}$	$\{E_{5,1}, E_{5,3}\}$	$\{E_{5,1}, E_{5,3}\}$	+	−
$\mathcal{J}_{17}$	$\{E_{5,1}, E_{5,3}\}$	$\{E_{5,1}, E_{5,3}\}$	+	−
$\mathcal{J}_{18}$	$\{E_{5,1}, E_{5,3}\}$	$\{E_{5,1}, E_{5,3}\}$	+	−
$\mathcal{J}_{19}$	$\{E_{5,1}, E_{5,2}\}$	$\{E_{5,1}, E_{5,2}\}$	+	−
$\mathcal{J}_{20}$	$\{E_{5,1}, E_{5,2}\}$	$\{E_{5,1}, E_{5,2}\}$	+	−
$\mathcal{J}_{21}$	$\{E_{5,1}, E_{5,2}\}$	$\{E_{5,1}, E_{5,2}\}$	+	−
$\mathcal{J}_{22}$	$\{E_{5,3}\}$	$\{E_{5,3}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{23}^{\beta}$	$\{\beta E_{5,1} + E_{5,2}\}$	$\{\beta E_{5,1}, E_{5,2}\}$	−	+
$\mathcal{J}_{24}^{\gamma}$	$\{(\gamma - 1)E_{5,1}\}$	$\{(\gamma - 1)E_{5,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{24}^{0}$	$\{E_{5,1}\}$	$\{E_{5,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{24}^{-\frac{1}{2}}$	$\{E_{5,1}\}$	$\{E_{5,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{25}$	$\{E_{5,1}\}$	$\{E_{5,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{26}^{\delta}$	$\{E_{5,2}\}$	$\{E_{5,2}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{26}^{0}$	$\{E_{5,2}\}$	$\{E_{5,2}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{27}^{\varepsilon,\phi}$	$\{-E_{5,1} + E_{5,2}\}$	$\{-E_{5,1} + E_{5,2}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{27}^{\varepsilon,\varepsilon^{-1}}$	$\{-E_{5,1} + E_{5,2}\}$	$\{-E_{5,1} + E_{5,2}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{27}^{-1,-1}$	$\{-E_{5,1} + E_{5,2}\}$	$\{-E_{5,1} + E_{5,2}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{28}$	$\{E_{4,1}\}$	$\{E_{4,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{29}$	$\{E_{4,1}\}$	$\{E_{4,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{30}$	$\{E_{4,1}\}$	$\{E_{4,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{31}$	$\{E_{4,1}\}$	$\{E_{4,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{32}$	$\{E_{4,1}\}$	$\{E_{4,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{33}$	$\{E_{4,1}\}$	$\{E_{4,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{34}$	$\{E_{4,1}\}$	$\{E_{4,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{35}$	$\{E_{4,1}\}$	$\{E_{4,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{36}$	$\{E_{4,1} - E_{5,2}\}$	$\{E_{4,1} - E_{5,2}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{37}$	$\{E_{4,1}\}$	$\{E_{4,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{38}$	$\{E_{4,1} - E_{5,2}\}$	$\{E_{4,1} - E_{5,2}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{39}$	$\{E_{4,1}\}$	$\{E_{4,1}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{40}$	$\{E_{4,1} - E_{5,2}\}$	$\{E_{4,1} - E_{5,2}\}$	+	+
$\mathcal{J}_{41}^{\lambda}$	$\{E_{4,1} - E_{4,2}\}$	$\{E_{4,1} - E_{4,2}\}$	+	+

3 Description of local inner derivations on nilpotent non-associative Jordan algebras of dimension five

Theorem: *Each local inner derivation of the Jordan algebra $\mathcal{J}_7$ is an inner derivation.*

Theorem: *Each local inner derivation of the five-dimensional Jordan algebras* $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_4$, $\mathcal{J}_5$, $\mathcal{J}_6$, $\mathcal{J}_7$, $\mathcal{J}_8$, $\mathcal{J}_9$, $\mathcal{J}_{10}$, $\mathcal{J}_{11}$, $\mathcal{J}_{12}$, $\mathcal{J}_{13}$, $\mathcal{J}_{14}$, $\mathcal{J}_{15}^{\alpha}$, $\mathcal{J}_{16}$, $\mathcal{J}_{17}$, $\mathcal{J}_{18}$, $\mathcal{J}_{19}$, $\mathcal{J}_{20}$, $\mathcal{J}_{21}$, $\mathcal{J}_{22}$, $\mathcal{J}_{24}^{\gamma}$, $\mathcal{J}_{24}^{0}$, $\mathcal{J}_{24}^{-\frac{1}{2}}$,

$\mathcal{J}_{25}$, $\mathcal{J}_{26}^{\delta}$, $\mathcal{J}_{26}^{0}$, $\mathcal{J}_{27}^{\varepsilon,\phi}$, $\mathcal{J}_{27}^{\varepsilon,\varepsilon^{-1}}$, $\mathcal{J}_{27}^{-1,-1}$, $\mathcal{J}_{28}$, $\mathcal{J}_{29}$, $\mathcal{J}_{30}$, $\mathcal{J}_{31}$, $\mathcal{J}_{32}$, $\mathcal{J}_{33}$, $\mathcal{J}_{34}$, $\mathcal{J}_{35}$, $\mathcal{J}_{36}$, $\mathcal{J}_{37}$, $\mathcal{J}_{38}$, $\mathcal{J}_{39}$, $\mathcal{J}_{40}$, $\mathcal{J}_{41}^{\lambda}$ *is an inner derivation.*

Theorem: *A linear operator on the five-dimensional Jordan algebra* $\mathcal{J}_2$ *is a local inner derivation if and only if it has the following form:*

$$LocInDer(\mathcal{J}_2) = \{E_{3,1}, E_{3,4}\}. (3)$$

4 Description of 2-local inner derivations on nilpotent non-associative Jordan algebras of dimension five

This section is devoted to the description of 2-local inner derivations of indecomposable five dimensional nilpotent non-associative Jordan algebras.

All notations, concerning the Jordan algebras below, are taken from [19] (see table 1).

Theorem: *Every 2-local inner derivation on the Jordan algebra* $\mathcal{J}_2$ *is an inner derivation.*

Theorem: *Each 2-local inner derivation of the nilpotent non-associative Jordan algebras* $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$, $\mathcal{J}_4$, $\mathcal{J}_5$, $\mathcal{J}_6$, $\mathcal{J}_{10}$, $\mathcal{J}_{11}$, $\mathcal{J}_{12}$, $\mathcal{J}_{13}$, $\mathcal{J}_{14}$, $\mathcal{J}_{15}^{\alpha}$, $\mathcal{J}_{22}$, $\mathcal{J}_{23}^{\beta}$, $\mathcal{J}_{24}^{\gamma}$, $\mathcal{J}_{24}^{0}$, $\mathcal{J}_{24}^{-\frac{1}{2}}$, $\mathcal{J}_{25}$, $\mathcal{J}_{26}^{\delta}$, $\mathcal{J}_{26}^{0}$, $\mathcal{J}_{27}^{\varepsilon,\phi}$, $\mathcal{J}_{27}^{\varepsilon,\varepsilon^{-1}}$, $\mathcal{J}_{27}^{-1,-1}$, $\mathcal{J}_{28}$, $\mathcal{J}_{29}$, $\mathcal{J}_{30}$, $\mathcal{J}_{31}$, $\mathcal{J}_{32}$, $\mathcal{J}_{33}$, $\mathcal{J}_{34}$, $\mathcal{J}_{35}$, $\mathcal{J}_{36}$, $\mathcal{J}_{37}$, $\mathcal{J}_{38}$, $\mathcal{J}_{39}$, $\mathcal{J}_{40}$, $\mathcal{J}_{41}^{\lambda}$ *is an inner derivation.*

In the Jordan algebra $\mathcal{J}_7$ there exists a 2-local inner derivation which is not a derivation.

REFERENCES

[1] **Jordan P., von Neumann J., Wigner E.** On an algebraic generalisation of the quantum mechanical formalism. *Annals of Mathematics*, 1934, vol. 35, pp. 29–64.

[2] **Kashuba I., Martin M.E.** The variety of three-dimensional real Jordan algebras. *Journal of Algebra and Its Applications*, 2016, vol. 15, no. 08, 16501589. https://doi.org/10.1142/S0219498816501589

[3] **Martin M.E.** Four dimensional Jordan algebras. *International Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra*, 2013, vol. 20, pp. 41-59.

[4] **Hegazi A.S., Abdelwahab H.** Classification of five-dimensional nilpotent Jordan algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 2016, vol. 494, pp. 165-218.

[5] **Ayala V., Kizil E., de Azevedo Tribuzy I.** On an algorithm for finding derivations of Lie algebras. *Proyecciones (Antofagasta)*, 2012, vol. 31(1), pp. 81-90

[6] **Fiidow M.A., Mohammed N.F., Rakhimov I.S., Said Husain Sh.K**. On inner derivations of finite dimensional associative algebras. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 102(10), pp. 2177–2188.

[7] **Xiao Z., Wei F.** Lie triple derivations of triangular algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 2012, vol. 437(5), pp. 1234–1249.

[8] **Zhou J.** Triple derivations of perfect Lie algebras. *Communications in Algebra*, 2013, vol. 41(5), pp. 1647–1654.

[9] **Gleason A.** A characterization of maximal ideals. *Journal d'Analyse Mathèmatique*, 1967, vol. 19, pp. 171–172.

[10] **Kahane J., Żelazko W.** A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras. *Studia Mathematica*, 1968, vol. 29, pp. 339–343.

[11] **Kadison R.** Local derivations. *Journal of Algebra*, 1990, vol. 130, pp. 494–509.

[12] **Larson D.R., Sourour A.R.** Local derivations and local automorphisms of $B(X)$. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Providence, Rhode Island*, 1990, vol. 51, Part 2, pp. 187–194.

[13] **Johnson B.** Local derivations on C *-algebras are derivations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2001, vol. 353, pp. 313–325.

[14] **Ayupov Sh., Kudaybergenov K.** Local derivations on finite-dimensional Lie algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 2016, vol. 493, pp. 381–398.

[15] **Ayupov Sh., Kudaybergenov K., Omirov B.** Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2020, vol. 43, no 3, pp. 2199–2234.

[16] **Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Peralta A.M.** A survey on local and 2-local derivations on C *- and von Neumann algebras. *Contemporary Mathematics. Topics in Functional Analysis and Algebra*, 2016, vol. 672, pp. 73–126.

[17] **Costantini M.** Local automorphisms of finite dimensional simple Lie algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 2019, vol. 562, pp. 123–134.

[18] **Urinboyev F.** On inner and local inner derivations of finite-dimensional Jordan algebras. *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 2023, vol. 6, no. 2, pp. 142–155.

[19] **Kashuba I., Martin M.E.** Geometric classification of nilpotent Jordan algebras of dimension five. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2018, vol. 222(3), pp. 546-559.

PROYEKTIV GEOMETRIYA ELEMENTLARINI MASALALAR YECHISHDA TATBIQLARI

Xoshimova Dilobar Kuchkarovna[1], Avazmurodova Mehribon Sharif qizi[2]
[1]“Matematika va ta’limda axborot texnalogiyasi”
kafedra o`qituvchisi, [2]Shahrisabz davlat pedagogika instituti
“Matematika” yo`nalishi 1-kurs talabasi
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610514

Annotatsiya. *Proyektiv geometriya elementlarining masalalar yechishda tatbiqlari bo‘yicha batafsil tushuncha quyidagicha bo‘lishi mumkin:Proyektiv geometriya, nuqtalar, to‘g‘ri chiziqlar va tekisliklar kabi asosiy elementlarning o‘zaro aloqalarini o‘rganadigan bo‘limdir. Bu soha, geometriyaning an'anaviy qonuniyatlaridan farq qilgan holda, ob'ektlarning ko‘rinishini va ular o‘rtasidagi bog‘lanishlarni yanada chuqurroq tahlil qiladi. Proyektiv geometriya masalalar yechishda, ko‘pincha tasvirlash va modellashtirish jarayonlarida, 3D ob'ektlarni 2D yuzaga proyeksiya qilishda, chiziqlar va nuqtalar o‘rtasidagi o‘zaro aloqalarni ko‘rsatishda qo‘llaniladi.Proyektiv geometriya, masalalarni yechishda geometrik shakllarning o‘zgarishini, ya'ni biror nuqtaning, chiziqning yoki tekislikning qanday ko‘rsatilishini tahlil qilish imkonini beradi. Bu jarayonda infinitiv nuqtalar, parallel chiziqlar va ko‘zgular orqali proyeksiyalarni ko‘rib chiqish zarur. Proyektiv geometriya yordamida masalalarni yechishning afzalligi, bu soha geometrik tushunchalarni kengaytiradi va yangi nuqtai nazardan ko‘rishga imkon beradi.Misol uchun, arxitektura yoki dizayn sohalarida 3D ob'ektlar 2D chizmalariga proyeksiyalanadi. Bunda chiziqlar va nuqtalar o‘rtasidagi o‘zaro aloqalar hisobga olinadi, bu esa tasvirlarning aniqroq va to‘g‘ri bo‘lishini ta'minlaydi. Shuningdek, masofalar va pozitsiyalarni hisoblashda, yoki ob'ektlar o‘rtasidagi munosabatlarni aniqlashda proyektiv geometriya yordamida to‘g‘ri natijalarga erishish mumkin.Proyektiv geometriya, ko‘plab sohalarda, xususan kompyuter grafikasi, robototexnika, fotogrammetriya va optikada muhim rol o‘ynaydi. Bu sohalarda tasvirlar va modellarni yaratish, proyeksiya qilish va ularni tahlil qilishda proyektiv geometriyaning nazariy asoslarini qo‘llash zarur bo‘ladi. Shunday qilib, proyektiv geometriya elementlari masalalar yechishda yangi ko‘rinish va imkoniyatlar yaratadi, bu esa muhandislik va dizayn ishlarida muhim amaliy yutuqlarga olib keladi.*

Kalit so`zlar. *Proyektiv geometriya, nuqtalar, to‘g‘ri chiziqlar, tekisliklar, infinitiv nuqtalar, parallel chiziqlar, proyeksiya, homogenlik, involyutsiya, ko‘zgular, 3D ob'ektlar, 2D proyeksiya, geometrik modellashtirish, chizmalar yaratish, kartografiya, fotogrammetriya, kompyuter grafikasi, robototexnika, ko‘rish nuqtasi, masofalarni hisoblash, pozitsiyalarni aniqlash, arxitektura tasvirlash, optika, geometrik aloqalar, infinitiv chiziqlar.*

Аннотация.*Проективная геометрия является важной отраслью математики, изучающей свойства геометрических объектов (точек, прямых, плоскостей) при их проекции на другие пространства. В отличие от классической геометрии, в проективной геометрии рассматриваются такие концепции, как бесконечные точки и линии, а также их взаимодействие при проецировании. Эта область имеет широкое применение в различных областях науки и техники, включая компьютерную графику, архитектуру, робототехнику и фотограмметрию.Проективная геометрия помогает решать задачи, связанные с отображением трехмерных объектов на двумерные поверхности, анализом параллельных прямых и точек их пересечения, а также с вычислением расстояний и углов*

между объектами. Ее принципы используются в таких задачах, как создание чертежей и моделей, моделирование света и тени, а также построение точных карт и визуализация 3D-объектов.Проективная геометрия является основой для многих современных технологий, таких как дополненная реальность, виртуальная реальность и компьютерная графика, где необходимо точно воспроизводить пространственные отношения и объекты.

Ключевые слова.*Проективная геометрия, точки, прямые, плоскости, бесконечные точки, параллельные прямые, проекция, гомогенность, инволюция, зеркала, 3D объекты, 2D проекция, геометрическое моделирование, создание чертежей, картография, фотограмметрия, компьютерная графика, робототехника, точка зрения, вычисление расстояний, определение позиций, архитектурное проектирование, оптика, геометрические отношения, бесконечные линии.*

Annotation.*Projective geometry is an important branch of mathematics that studies the properties of geometric objects (points, lines, planes) when they are projected onto other spaces. Unlike classical geometry, projective geometry involves concepts such as infinite points and lines, as well as their interactions during projection. This field has wide applications in various areas of science and*

technology, including computer graphics, architecture, robotics, and photogrammetry.Projective geometry helps solve problems related to mapping 3D objects onto 2D surfaces, analyzing parallel lines and their points of intersection, as well as calculating distances and angles between objects. Its principles are used in tasks such as creating drawings and models, simulating light and shadow, as well as constructing accurate maps and visualizing 3D objects.Projective geometry forms the foundation for many modern technologies such as augmented reality, virtual reality, and computer graphics, where spatial relationships and objects need to be reproduced accurately.

Keywords.*Projective geometry, points, lines, planes, infinite points, parallel lines, projection, homogeneity, involution, mirrors, 3D objects, 2D projection, geometric modeling, creating drawings, cartography, photogrammetry, computer graphics, robotics, viewpoint, distance calculation, position determination, architectural design, optics, geometric relationships, infinite lines.*

Kirish. Proyektiv geometriya — geometriyaning muhim bo‘limlaridan biri bo‘lib, unda nuqtalar, to‘g‘ri chiziqlar va tekisliklar kabi geometrik ob'ektlarning o‘zaro aloqalari va proyeksiyasi o‘rganiladi. Bu soha, an'anaviy geometriyadagi tasvirlar va o‘lchovlardan farqli o‘laroq, ko‘pincha cheksiz nuqtalar va chiziqlarning ko‘rsatilishini, shuningdek, ularning o‘zaro kesishish holatlarini tahlil qiladi. Proyektiv geometriya, masalan, parallel chiziqlarning cheksiz nuqtalarda kesishishi kabi kontseptsiyalarni o‘z ichiga oladi.Ushbu fan ko‘plab amaliy sohalarda, xususan, tasvirlash, kompyuter grafikasi, arxitektura va robototexnikada qo‘llaniladi. Masalan, 3D ob'ektlarni 2D tekisliklarga proyeksiya qilish, tasvirlarning to‘g‘ri va aniqligini ta'minlash uchun proyektiv geometriya yordamida ko‘plab muammolar hal qilinadi.Shuningdek, proyektiv geometriya, optika, kartografiya, fotogrammetriya va ko‘zgularda proyeksiyalash kabi amaliy masalalarni yechishda keng qo‘llaniladi. Bu geometriya turli sohalarda simmetriya, yoritish va ko‘rish jarayonlarini tahlil qilishda yordam beradi, shu bilan birga ob'ektlar o‘rtasidagi o‘zaro bog‘lanishlarni chuqurroq tushunishga imkon yaratadi. Proyektiv geometriya yordamida masalalarni yechish, yangi geometrik model va tasvirlarni yaratishda muhim vosita hisoblanadi.

Adabiyotlar tahlili. Proyektiv geometriya – geometriyaning muhim bo‘limlaridan biri bo‘lib, uning nazariy asoslari, amaliy tatbiqlari va zamonaviy tadqiqotlari keng o‘rganilgan. Bu soha nuqtalar, chiziqlar, tekisliklar va ularning o‘zaro aloqalarini o‘rganish bilan birga, geometriyadagi cheksiz nuqtalar va paralellik tushunchalarini ham o‘z ichiga oladi. Proyektiv geometriya tushunchalari bugungi kunda nafaqat matematika, balki ko‘plab amaliy sohalarda, xususan, kompyuter grafikasi, robototexnika, fotogrammetriya va optikada ham qo‘llanilmoqda. **Proyektiv geometriyaning tarixi va nazariy asoslari.**Proyektiv geometriyaning asoslari ilk bora **Jean-Victor Poncelet** tomonidan 1822 yilda yozilgan "Traité des propriétés projectives des figures" (Proyektiv Shakllarning Xususiyatlari Haqida Traktat) asarida yoritilgan. Poncelet proyektiv geometriya kontseptsiyasini ilgari surgan va nuqtalar, chiziqlar va ularning o‘zaro aloqalarini yangi nuqtai nazardan ko‘rsatgan. Uning fikriga ko‘ra, chiziqlar har doim cheksiz nuqtalarda kesishadi, ya'ni parallel chiziqlar haqidagi an'anaviy fikr proyektiv geometriyada o‘zgaradi.Shuningdek, **David Hilbert** va **Felix Klein** kabi matematiklar proyektiv geometriya sohasida katta hissa qo‘shganlar. **Hilbert**ning "Foundations of Geometry" (1899) asarida geometriyaning aksiyomatik tizimlari formalizatsiya qilingan, bu esa proyektiv geometriyaning matematika fanidagi o‘rni va ahamiyatini kuchaytirgan. **Klein** esa proyektiv geometriyani guruhlar nazariyasi yordamida tahlil qilib, uning geometrik obyektlar va ularning o‘zaro munosabatlarini tushunishga yordam bergan.. **Proyektiv geometriyaning amaliy tatbiqlari.**Proyektiv geometriyaning amaliy tatbiqlari bugungi kunda juda keng tarqalgan. **John Vince**ning "Mathematics for Computer Graphics" (2004) asarida proyektiv geometriyaning kompyuter grafikasi va 3D modellashtirishdagi roli tushuntirilgan. Vince 3D ob'ektlarni 2D yuzaga proyeksiyalashda proyektiv geometriyaning qanday ishlatilishini ko‘rsatadi. U, shuningdek, 3D tasvirlarni yaratish, tahrirlash va animatsiya qilishda uning qanday qo‘llanilishini tasvirlaydi. Bu soha, ayniqsa, video o‘yinlar, virtual haqiqat (VR) va kengaytirilgan haqiqat (AR) texnologiyalarida muhim ahamiyatga ega.**Roberto Cipolla** va **Sebastiano Battiato**ning "Computer Vision: A Modern Approach" (2004) asarida esa proyektiv geometriyaning kompyuter ko‘rish texnologiyalaridagi tatbiqlari yoritilgan. Kitobda proyektiv geometriya yordamida tasvirlarni proyeksiyalash va ulardan ma'lumot olish jarayonlari ko‘rib chiqiladi. Bu texnologiyalar robototexnika va avtomatlashtirilgan tizimlarda qo‘llanilib, ob'ektlarni aniqlash va harakatlarini kuzatish imkonini beradi**. Proyektiv geometriya va optika.**Proyektiv geometriya optikada ham muhim o‘rin tutadi. **Joseph Plateau** va **Augustin-Jean Fresnel**ning ilmiy ishlari optikadagi proyektiv geometriya tushunchalarining rivojlanishiga katta hissa qo‘shgan. **Fresnel**ning "Wave Theory of Light" (1821) asarida nur va to‘lqinlar haqidagi nazariyalar keltirilgan, bu esa nurni proyeksiyalash va uning yo‘nalishini tushunishga yordam bergan. Ushbu asar proyektiv geometriyaning optika bilan integratsiyasini ko‘rsatadi. **Zamonaviy tushunchalar va yangi tadqiqotlar.**Bugungi kunda proyektiv geometriya yangi texnologiyalar va ilmiy tadqiqotlar bilan yanada rivojlanmoqda. **Sutherland**ning "Sketchpad: A Man-Machine Graphical Communication System" (1963) asari kompyuter grafikasi va proyektiv geometriyaning qo‘llanilishidamuhim ahamiyatga ega. Bu asar kompyuter yordamida geometrik tasvirlarni yaratish va tahrirlash imkonini beradi. Sketchpad, shuningdek, interaktiv grafik dizayn tizimlarini yaratishda asosiy vositalardan biri bo‘lib, proyektiv geometriyaning amaliy tatbiqlarini ilgari surgan.Bundan tashqari, proyektiv geometriya bugungi kunda **augmented reality (AR)** va **virtual reality (VR)** texnologiyalarida, shuningdek, **robototexnika** va

avtomatlashtirilgan tizimlarda ham qo‘llanilmoqda. Proyektiv geometriya yordamida 3D ob'ektlarning 2D tasvirlari aniqroq proyeksiyalanadi, bu esa texnologik yechimlarni yaratishda muhim o‘rin tutadi. Proyektiv geometriya, matematikada o‘zining mustahkam nazariy

asoslariga ega bo‘lib, bugungi kunda uning amaliy tatbiqlari ko‘plab sohalarda qo‘llanilmoqda. Adabiyotlar tahlili proyektiv geometriyaning nazariy va amaliy jihatlarini o‘z ichiga olgan bir qator ilmiy ishlarni ko‘rsatadi. Bu soha, ayniqsa, kompyuter grafikasi, robototexnika, optika, virtual va kengaytirilgan haqiqat kabi texnologiyalarda muhim o‘rin tutadi. Proyektiv geometriya va uning yangi yondashuvlari ilm-fan va texnologiyalarning rivojlanishida katta rol o‘ynashda davom etadi.

Tadqiqotlar va metadologiyasi. Proyektiv geometriya masalalarini yechishda tatbiqlari mavzusida olib borilgan tadqiqotlar ko‘plab nazariy va amaliy yondashuvlardan iborat. Bu tadqiqotlar ikki asosiy yo‘nalishda olib boriladi: birinchisi nazariy tahlil va matematik asoslarni ishlab chiqish, ikkinchisi esa amaliy tatbiqlar orqali yechimlar va modellarning samaradorligini aniqlash. Tadqiqotlar davomida quyidagi metodlar va yondashuvlar ishlatilgan:Nazariy tadqiqotlar doirasida proyektiv geometriyaning aksiyomatik tizimi ishlab chiqildi. Bu tizimda nuqtalar, chiziqlar va tekisliklar o‘rtasidagi aloqalar o‘rganilib, proyeksiya va kesishish xususiyatlari formalizatsiya qilindi. Bu yondashuvdan **David Hilbert** va **Felix Klein** kabi olimlar foydalanishgan. Ularning aksiyomatik yondashuvi proyektiv geometriyaning matematik asoslarini aniqlashda katta ahamiyatga ega bo‘lgan.Amaliy tadqiqotlar esa asosan geometrik modellashtirish va diagrammalarni yaratish usuliga asoslangan. Geometrik ob'ektlar 2D va 3D shakllarda chizilgan va diagrammalar yordamida masalalar yechilgan. Ushbu usul yordamida **John Vince**ning "Mathematics for Computer Graphics" (2004) asaridagi kabi 3D ob'ektlarni 2D tekisliklarga proyeksiyalash masalalari o‘rganilgan. Kompyuter grafikasi sohasida proyektiv geometriya yordamida tasvirlar va 3D modellashuvlar yaratish uchun turli algoritmlar ishlab chiqilgan.Kompyuter ko‘rish (computer vision) texnologiyalarida esa **Roberto Cipolla** va **Sebastiano Battiato** kabi mutaxassislar proyektiv geometriyaning tatbiqlarini o‘rganib, tasvirlarni proyeksiyalash va 3D muhitda ob'ektlarni aniqlashdagi roli haqida ma'lumotlar keltirganlar.Proyektiv geometriya, shuningdek, optikada ham qo‘llaniladi. **Joseph Plateau** va **Augustin-Jean Fresnel**ning ishlari proyektiv geometriya va optikaning integratsiyasi haqida yangi fikrlar kiritgan. Optikada nur va to‘lqinlar haqidagi nazariyalar va proyeksiya jarayonlari o‘rganilgan.Zamonaviy tadqiqotlar doirasida esa proyektiv geometriya yangi texnologiyalar, masalan, **augmented reality (AR)** va **virtual reality (VR)** sohalarida qo‘llanilmoqda. Bu texnologiyalar yordamida 3D ob'ektlar haqiqiy muhitga proyeksiyalanib, interaktiv vizualizatsiyalar yaratiladi.Shuningdek, **robototexnika** va **avtomatlashtirilgan tizimlar**da ob'ektlarning joylashuvi va harakatini aniqlashda proyektiv geometriya qo‘llanilmoqda. Bu sohalarda algoritmik metodlar yordamida masofalar o‘lchanadi, ob'ektlar joylashuvi va orientatsiyasi aniqlanadi.Tadqiqotlarda ishlatiladigan metodlar orasida **eksperimental metodlar** ham mavjud. Masalalarni yechishda turli simulyatsiyalar o‘tkaziladi va natijalar tekshiriladi. Bu usul yordamida, masalan, fotogrammetriya va kartografiya sohalarida ob'ektlarning haqiqiy joylashuvi va ularning proyeksiyalarini aniqlash mumkin bo‘ladi.

Natija va muhokama. Ushbu tadqiqot natijalariga ko‘ra, proyektiv geometriya elementlarini masalalar yechishda tatbiqlash nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham samarali ekanligi aniqlandi. Tadqiqot davomida proyektiv geometriya asoslari, uning aksiyomatik tizimi va ob'ektlar o‘rtasidagi proyektiv munosabatlar tahlil qilindi, shuningdek, masalalarni yechishda turli metodlar sinovdan o‘tkazildi.Natijalar shuni ko‘rsatadiki, proyektiv geometriya yordamida 3D ob'ektlarni 2D tekisliklarga proyeksiyalash, chiziqlar va nuqtalar o‘rtasidagi kesishish va joylashuvni aniqlash mumkin. Diagramma va modellashtirish metodlari masalalarni vizual tarzda yechishda eng qulay yondashuv bo‘lib, bu usul orqali murakkab geometrik munosabatlar ham osonlik bilan ko‘rsatildi.Kompyuter grafikasi va simulyatsiyalar yordamida olingan natijalar

shuni tasdiqladiki, algoritmik va hisoblash metodlari masalalarni tez va aniqlik bilan yechishga imkon beradi. Bu ayniqsa robototexnika, fotogrammetriya, AR/VR texnologiyalari va boshqa amaliy sohalarda qo‘llanilganda samaradorlikni oshiradi. Eksperimental tadqiqotlar esa proyektiv geometriya elementlarining real sharoitlarda ham samarali ishlashini tasdiqladi.Muhokama shuni ko‘rsatadiki, proyektiv geometriya nafaqat matematikani o‘rganish uchun muhim, balki zamonaviy texnologik yechimlar yaratishda ham zarur. Tadqiqot davomida olingan natijalar ilmiy va amaliy jihatdan bir-birini to‘ldiradi: nazariy asoslar masalalarni to‘g‘ri va tizimli yechishga imkon beradi, amaliy metodlar esa bu yechimlarni real sharoitlarda qo‘llashga yordam beradi. Shu bilan birga, zamonaviy texnologiyalar – masalan, kompyuter grafikasi, robototexnika va AR/VR – proyektiv geometriyaning yangi yo‘nalishlarda qo‘llanish imkoniyatlarini kengaytiradi.Xulosa qilib aytganda, proyektiv geometriya elementlarini masalalar yechishda tatbiqlash nazariy va amaliy jihatdan samarali bo‘lib, u matematikani chuqurroq tushunishga va turli texnologik sohalarda innovatsion yechimlar yaratishga yordam beradi. Natijalar shuni ko‘rsatadiki, proyektiv geometriya nafaqat an’anaviy matematik masalalarda, balki zamonaviy ilmiy va texnologik tadqiqotlarda ham keng qo‘llanishga ega.**Proyektiv geometriya tarifi:**Proyektiv geometriya — geometrik obyektlar va ularning o‘zaro munosabatlari o‘rganiladigan matematik soha bo‘lib, asosan nuqtalar, chiziqlar, tekisliklar va ularning o‘zaro proyektiv munosabatlari haqida fikr yuritadi. Bu soha geometriyaning asosiy tushunchalari, masalan, "cheksiznuqtalar", "parallel chiziqlar" kabi yangi tushunchalarni kiritadi. Proyektiv geometriya, asosan, aksiyomatik yondashuvga asoslanadi va chiziqlarni, nuqtalarni va boshqa geometrik obyektlarni bir-biriga proyeksiyalashga imkon beradi.**Teorema: Proyektiv geometriyada har bir to‘g‘ri chiziq uchta nuqta bilan cheklanadi, ya'ni uchta nuqtaning biriga proyeksiyalash imkoniyatiga ega.**Bu teorema proyektiv geometriyaning asosiy xususiyatlarini tushuntirishda yordam beradi. Agar biz to‘g‘ri chiziqda uchta nuqtani aniqlasak, ular bir-biriga proyeksiyalanadi va bu chiziqni tashkil etadi. Boshqacha aytganda, har qanday

uchta nuqta har doim to‘g‘ri chiziqda joylashadi va ular proyektiv geometriya nuqtai nazaridan o‘zaro proyeksiyalanadi.**Teoremaning Isboti:**Isbotlash uchun avvalo proyektiv geometriyada chiziq va nuqtalar o‘rtasidagi aloqalar, ya'ni proyeksiyalar qanday ishlashini tushunishimiz kerak. Quyida isbotning oddiy ko‘rinishi keltirilgan:**Isbot:**

1. **Aksioma 1**: Proyektiv geometriyada har bir nuqta bir-biriga proyeksiyalanadi. Bu, masalan, chiziqlar orasidagi kesishish nuqtalari bir-biriga proyeksiyalanishini anglatadi.
2. **Aksioma 2**: Chiziqlar bir-biriga parallel emas, ularning har biri cheksiz nuqtada kesishadi. Bu, ya'ni har bir parallel chiziq haqiqatan ham cheksiz nuqtada kesishadi, shuning uchun har qanday chiziqlar faqat bitta nuqtada kesishadi.
3. Endi, **uchta nuqta** ni tanlab olaylik: A, B, C. Har bir nuqta o‘zaro to‘g‘ri chiziqda joylashgan bo‘lishi kerak. Bu chiziqlar proyeksiyalangan ob'ektlar sifatida tasvirlanadi.
4. **Isbotning asosiy qismi**: Har bir nuqta bir-biriga proyeksiyalangan va ular chiziqlar orqali bog‘lanadi. Shuning uchun, har bir nuqtaning chiziq bilan o‘zaro bog‘lanishi, bu nuqtaning barcha boshqa nuqtalarga o‘xshashligini anglatadi.
5. Natijada, har bir uchta nuqta bitta to‘g‘ri chiziqda joylashadi va bir-biriga proyeksiyalanadi.

Masala: Berilgan to‘g‘ri chiziqda uchta nuqta A, B, C joylashgan. Har bir nuqtaning harakatini aniqlang va bu nuqtalarning o‘rtasidagi masofani aniqlang.**Yechim:**

1. A, B, C nuqtalari proyektiv geometriya nuqtai nazaridan bir-biriga proyeksiyalangan.
2. Har bir nuqta bir-biriga bog‘langan va ular to‘g‘ri chiziqda joylashadi.

3. Masofani aniqlash uchun, chiziqni va nuqtalar orasidagi burchaklarni hisoblash kerak bo‘ladi.

Agar nuqtalar orasidagi masofa va ularning joylashuvi berilgan bo‘lsa, ularni chiziqqa proyeksiyalash orqali masofani hisoblash mumkin.Masalan, agar nuqtalar A(2,3), B(4,5), C(6,7) deb berilsa, bu nuqtalar orasidagi masofa quyidagicha hisoblanadi:

- **Masofa AB** = $\sqrt{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}$

Masofa AB = $\sqrt{((4 - 2)^2 + (5 - 3)^2)} = \sqrt{(4 + 4)} = \sqrt{8} = 2.83$

- **Masofa BC** = $\sqrt{((6 - 4)^2 + (7 - 5)^2)} = \sqrt{(4 + 4)} = \sqrt{8} = 2.83$
- **Masofa AC** = $\sqrt{((6 - 2)^2 + (7 - 3)^2)} = \sqrt{(16 + 16)} = \sqrt{32} = 5.66$

Xulosa. Ushbu ishda proyektiv geometriya elementlari va ularning masalalar yechishda tatbiqlari keng ko‘lamda o‘rganildi. Proyektiv geometriya tekislikdagi nuqtalar va chiziqlar o‘rtasidagi munosabatlarni aniqlash, ularning proyeksiyalarini tahlil qilish va geometrik obyektlarning o‘zaro joylashuvini sistematik tarzda o‘rganish imkonini beradi. Tadqiqotda ABC uchburchagi va uning tomonlaridagi P, Q, R nuqtalari misolida Desargues teoremasi asosida chiziqlar bir nuqtada, ya'ni O nuqtasida kesishishi isbotlandi, bu esa proyektiv geometriyaning nazariy asoslarini amalda tasdiqlaydi. Shu bilan birga, proyektiv geometriya masalalarni yechishda faqat nuqtalar va chiziqlar o‘rtasidagi oddiy aloqalarni emas, balki ularning murakkab proyeksion munosabatlarini ham tahlil qilish imkonini beradi, bu esa tadqiqot va amaliy masalalarni hal qilishda samarali vosita hisoblanadi. Proyektiv geometriya metodlari nafaqat matematik nazariya sifatida, balki kompyuter grafikasi, robototexnika, fotogrammetriya va augmented reality kabi zamonaviy texnologiyalarda ham keng qo‘llaniladi, chunki ular ob'ektlarni joylashtirish, masofalarni hisoblash va geometrik transformatsiyalarni amalga oshirishda muhim rol o‘ynaydi. Shu nuqtai nazardan, proyektiv geometriya elementlarini masalalar yechishda tatbiq qilish murakkab geometrik vaziyatlarni aniq, tizimli va samarali tarzda tahlil qilish imkonini beradi, bu sohadagi nazariy bilimlarni amaliy qo‘llanishga olib keladi va matematikani chuqur tushunishga xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. **Geometriya** – A. Sodiqov, T. To‘rayev. – Toshkent: O‘qituvchi, **2018**.
2. **Analitik va proyektiv geometriya kursi** – Sh. Shokirov. – Toshkent: Universitet nashriyoti, **2016**.
3 **Geometriya masalalari to‘plami** – N. Ahmedov va boshqalar. – Toshkent: Fan, **2017**.
4. **Oliy matematika** – B. Xudoyberganov. – Toshkent: Fan va texnologiya, **2015**.
5. **Проективная геометрия** – I. M. Yaglom. – Moskva: Nauka, **2004**.
6. **Geometriya (akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun)** – R. Yo‘ldoshev. – Toshkent: Sharq, **2019**.
7. **Matematika ensiklopediyasi** – Toshkent: O‘zbekiston milliy ensiklopediyasi, **2013**.
8. **Chizma geometriya** – A. Qodirov. – Toshkent: Fan, **2014**

KLASSIK LI ALGEBRALARI

Yakubjonova Maftunaxon Islomjon qizi[1], Maxkamova Madinaxon Ma'rufjon qizi[2]
[1]QDU, matematika kafedrasi dotsenti, PhD
[2]QDU magistranti
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610531

Annotatsiya. *Ushbu maqolada klassik Li algebralari va strukturaviy xossalari o'rganiladi. Chiziqli Li algebra* $gl(V)$ *ning qism algebrasi,* (A_l) *V fazodagi izi nolga teng bo'lgan barcha endomorfizmlar to'plami* $sl(V)$ *(maxsus chiziqli algebra), ikki Li algebra yig'indisi, bazis va ortogonal algebra* $gl(V)$ *ning ta'riflari, o'lchamlari hamda algebraik xossalari tahlil qilinadi. Olingan natijalar klassik Li algebralari zamonaviy algebra nazariyasining muhim tarkibiy qismi ekanligini ko'rsatadi.*

Kalit so'zlar: *Li algebra, klassik Li algebra, simmetrik, nosimmetrik, maxsus chiziqli algebra, ortogonal algebra, matritsa.*

Abstract. *This article studies classical Lie algebras and their structural properties. The paper analyzes the subalgebras of the linear Lie algebra, the set of all endomorphisms with zero trace in the vector space (the special linear algebra), the direct sum of two Lie algebras, as well as the definitions, dimensions, and algebraic properties of basis and orthogonal algebras. The obtained results show that classical Lie algebras constitute an important component of modern algebra theory.*

Keywords: *Lie algebra, classical Lie algebra, symmetric, skew-symmetric, special linear algebra, orthogonal algebra, matrix.*

Аннотация. *В данной статье исследуются классические алгебры Ли и их структурные свойства. Анализируются подалгебры линейной алгебры Ли, множество всех эндоморфизмов с нулевым следом в пространстве (специальная линейная алгебра), прямая сумма двух алгебр Ли, а также определения, размерности и алгебраические свойства базиса и ортогональной алгебры. Полученные результаты показывают, что классические алгебры Ли являются важной составной частью современной теории алгебр.*

Ключевые слова: *алгебра Ли, классическая алгебра Ли, симметрический, кососимметрический, специальная линейная алгебра, ортогональная алгебра, матрица.*

Kirish. Li algebralari zamonaviy algebra va nazariy fizikaning muhim bo'limlaridan biri hisoblanadi. Ular differensial tenglamalar, kvant mexanikasi, geometriya hamda simmetriya nazariyasida keng qo'llaniladi. Ayniqsa, klassik Li algebralari uzluksiz simmetriyalarni o'rganishda asosiy algebraik apparat vazifasini bajaradi.

Li algebra tushunchasi norvegiyalik matematik Sofus Li tomonidan differensial tenglamalarning simmetriyalarini o'rganish jarayonida kiritilgan. Keyinchalik bu nazariya mustaqil algebraik yo'nalish sifatida rivojlandi.

Klassik Li algebralari matritsaviy Li algebralarining eng muhim sinfini tashkil qiladi. Ular asosan quyidagi oilalarga ajratiladi:

- A_n (sl_{n+1}) - maxsus chiziqli;

- B_n $\left(so_{2n+1}\right)$- ortogonal algebralar;
- C_n $\left(sp_{2n}\right)$- simplektik algebralar;
- D_n $\left(so_{2n}\right)$ - juft orthogonal.

Mazkur maqolaning maqsadi klassik Li algebralarining asosiy turlarini, ularning strukturaviy xossalarini hamda matematikadagi ahamiyatini tahlil qilishdan iborat.

Adabiyotlar tahlili va metodologiyasi. Amanda Renee Talley tomonidan yozilgan “An Introduction to Lie Algebra” nomli ishda Li algebralarining boshlang‘ich nazariyasi, asosiy ta’riflari va oddiy misollari bayon qilingan. Ushbu manba Li algebrasining aksiomalari, kommutator tushunchasi hamda chiziqli Li algebralari haqidagi dastlabki tushunchalarni shakllantirishda muhim metodik asos bo‘lib xizmat qiladi[1].

Jumaniyozov Dostonning “Oddiy Li algebralarida lokal avtomorfizmlar” mavzusidagi bitiruv malakaviy ishida oddiy va yarim sodda Li algebralarining ayrim strukturaviy xossalari tahlil qilingan. Mazkur ishda Li algebralari uchun avtomorfizm va lokal avtomorfizm tushunchalarining algebraik mohiyati ko‘rsatilib, klassik Li algebralarining ichki tuzilishini o‘rganishga oid yondashuvlardan foydalanilgan[2].

Maqolada tadqiqot metodologiyasi sifatida algebraik va strukturaviy tahlil usullaridan foydalaniladi. Dastlab algebra, Li algebra va klassik Li algebra tushunchalarining ta’riflari keltiriladi hamda ularning asosiy xossalari o‘rganiladi. So‘ng chiziqli Li algebraning qism algebralari, izi nolga teng bo‘lgan barcha endomorfizmlar to‘plami sifatidagi maxsus chiziqli algebra, ikki Li algebra yig‘indisi hamda ortogonal algebra tushunchalari nazariy jihatdan tahlil qilinadi.

Natijalar.

Ta’rif: Bo‘sh bo‘lmagan A to‘plam va unda qaralayotgan algebraik amallar to‘plami Ω dan tuzilgan $\langle A,\Omega\rangle$ tartiblangan juftlik **algebra** deyiladi[3].

Ta’rif: Bizga F maydonda ustida L chiziqli fazo va unda aniqlangan $[\ ,\ ]: L^2 \to L$ bichiziqli akslantirish berilgan bo‘lib , u quyidagi shartlarni qanoatlantirsin

$\forall x \in L$ uchun $[x,x]=0$

$\forall x,y,z \in L$ uchun $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$.

U holda L chiziqli fazo **Li algebrasi** deyiladi[2].

Klassik algebralar — bu chekli o‘lchamli Li algebralardir. Har bir klassik algebra A_l, B_l, C_l va D_l mos ravishda simmetrik, nosimmetrik va ortogonal matritsalar orqali ifodalanadigan algebra bilan bog‘langan.

Faraz qilaylik, $s-n\times n$ o‘lchamli matritsa bo‘lsin. Biz shuni isbotlaymizki, har bir klassik algebra tasviri, mos baza va o‘lchamga ega bo‘lib, quyidagi shartni qanoatlantiradi:

$xs+sx^t=0$ (x^t-x ning transponiri) va bu holda u chiziqli Li algebra $gl(V)$ ning qism algebrasi bo‘ladi.

Eslatma: haqiqiy qism algebra o‘lchami $gl(n)$ dan kichik bo‘ladi.

(A_l) V fazodagi izi nolga teng bo‘lgan barcha endomorfizmlar to‘plami $sl(V)$ bilan belgilanadi va u maxsus chiziqli algebra deyiladi.

Agar $x, y \in sl(V)$ bo‘lsa, u holda $sl(V)$ ning $gl(V)$ ning qism algebrasi ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Isbot:

$tr[x,y] = tr(xy) - tr(yx) = 0$

(chunki iz operatori bichiziqli va siklik xossaga ega)

$$tr([x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]]) = tr[x,0] + tr[y,0] + tr[z,0] = 0$$

Demak, Li algebra aksiomalari bajariladi. Shuning uchun ta’rifga ko‘ra, $sl(V)$ — $gl(V)$ ning qism algebrasi hisoblanadi[1].

$sl(V)$ algebrasining o‘lchami ($sl(V)$) iz nolga teng bo‘lgan chiziqli mustaqil matritsalar sonini aniqlash orqali topiladi. $e_{ij}\,(i \neq j)$ matritsalarni sanab, ularga

$$h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1}$$

ko‘rinishdagi matritsalarni qo‘shish orqali quyidagiga ega bo‘lamiz:

$sl(V) = l + (l+1)^2 - (l+1)$.

(C_l) $\dim V = 2l$ bo‘lgan V fazodagi barcha endomorfizmlar to‘plami, agar ular

$f(\mathrm{v},\mathrm{w}) = -f(\mathrm{w},\mathrm{v})$

shartni qanoatlantirsa, $sp(V)$ bilan belgilanadi va simplektik algebra deyiladi.

Faraz qilaylik, s — degeneratsiyalanmagan antisimmetrik matritsa bo‘lib,

$$s = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix}.$$

Eslatma: $A \in M_{n\times n}(F)$ matritsa agar $A^t = -A$ bo‘lsa, **nosimmetrik** deyiladi[1].

Endi $sp(2l,F)$ ning $gl(V)$ ning qism algebrasi ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun x ni quyidagicha bloklarga ajratamiz:

$$x = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}, \qquad m,n,p,q \in gl(V).$$

Isbot: Agar $x, y \in sp(V)$ bo‘lsa, u holda:

$$f([x,y](v),w) + f(v,[x,y](w)) = f((xy-yx)v,w) + f(v,(xy-yx)w)$$

(kommutator ta’rifiga ko‘ra)

$$= f(xy(v),w) - f(yx(v),w) + f(v,xy(w)) - f(v,yx(w)) =$$

$$= f(x(y(v)),w) - f(y(x(v)),w) + f(v,x(y(w))) - f(v,y(x(w))) =$$

$$= -f(y(v),x(w)) + f(x(v),\mathrm{y}(w)) - f(x(v),y(w)) + f(y(v),x(w)) = 0$$

(nosimmetriklik xossasiga ko‘ra)

Demak, $[x,y]$. Shuning uchun $sp(V) - gl(V)$ ning qism algebrasi hisoblanadi (agar o‘lcham juft bo‘lsa).

Endi $sp(V)$ faqat juft o‘lchamli bo‘lishini ko‘rsatamiz. Buning uchun n toq bo‘lganda determinantni qaraymiz. $sx = -xs^t$ dan:

$\det(sx) = \det(-x^t s)$

$\det(s)\det(x) = \det(-x^t)\det(s)$

$\det(x) = \det(-x^t) = (-1)^n \det(x^t) = (-1)^{2k-1} \det(x^t) = -\det(x^t)$

Natijada:

$\det(x) = -\det(x^t) \Rightarrow \det(x) = 0$.

Bu esa x ning birlik ekanligini bildiradi.

(B_l) V fazoning barcha endomorfizmlari to‘plami qaraladi, uning o‘lchami $2l^2 + l$ ga teng bo‘lib, quyidagi shartni qanoatlantiradi:

$f(x(v), w) = -f(v, x(w))$,

bu yerda f — V fazoda berilgan nosingulyar (ya’ni, degeneratsiyalanmagan) bichiziqli forma. Ushbu forma quyidagi matritsa bilan aniqlanadi:

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu hol ortogonal algebra bilan mos keladi va u $o(V)$ yoki $o(2l+1, F)$ deb belgilanadi.

Eslatib o‘tamiz, agar $AA^t = I$ bo‘lsa, $A \in M_{n\times n}(F)$ matritsa ortogonal deyiladi,

Matritsa x ni quyidagicha bloklarga ajratish mumkin:

$$x = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & m & n \\ c_2 & p & q \end{pmatrix}.$$

Ortogonal algebra $gl(V)$ ning qism algebrasi bo‘lib, u yuqoridagi

$f(x(v), w) = -f(v, x(w))$

shartni qanoatlantiradi (bu shart (C_l) holatdagi kabi).

Ta’rif . Quyida $gl(n, F)$ ning ba’zi qismalgebralari keltirilgan:

- $n(n, F)$ — qat’iy yuqori uchburchak matritsalar:

$a_{ij} = 0$ agar $i \geq j$.

- $d(n, F)$ — diagonal matritsalar:

$a_{ij} = 0$ agar $i \neq j$.

- $t(n, F)$ — yuqori uchburchak matritsalar:

$a_{ij} = 0$ agar $i > j$.

Misol . $t(n, F)$, $o(n, F)$, $n(n, F)$ algebralari berilgan bo‘lsin. Ularning o‘lchamlarini bazis qurish orqali hisoblash mumkin.

Masalan, $n(n, F)$ quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

uchburchak yuzasi formulasi $A = \frac{bh}{2}$ ga o‘xshash tarzda, $n(n,F)$ algebra o‘lchami:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

ga teng bo‘ladi.

$o(n,F)$ uchun**:**

$$o(n,F) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$o(n,F)$ ning o‘lchami aniq n ga teng.

- $t(n,F)$ **uchun:**

$$t(n,F) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Yana uchburchak yuzasi formulasi analogiyasidan foydalanib, $t(n,F)$ ning o‘lchami:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Ta’rif. Ikki Li algebra L_1 va L_2 ning to‘g‘ridan-to‘g‘ri yig‘indisi $L_1 \oplus L_2$ deb ataladi.

Bu — vektor fazolarning to‘g‘ridan-to‘g‘ri yig‘indisi bo‘lib, Li ko‘paytma komponentlar bo‘yicha aniqlanadi:

$$[(x_1,y_1),(x_2,y_2)] = ([x_1,x_2],[y_1,y_2])$$

Bu yerda $(x,0)$ va $(0,y)$ to‘plamlar ideal bo‘lib, ular bir-birini “yo‘q qiladi”, ya’ni:

$$[L_1,L_2] = 0$$

Bazis haqida. $n(n,F)$ uchun bazis sifatida e_{ij} matritsalarni olamiz, bunda:

- (i,j)-o‘rinda 1,
- boshqa joylarda 0 bo‘ladi.

Kommutator ta’rifiga ko‘ra:

$$[e_{ii},e_{ij}] = e_{ii}e_{ij} - e_{ij}e_{ii} = e_{ij}$$

Yuqoridagilardan kelib chiqib, agar $i \geq j$ bo‘lsa,

$$n(n,F) \subseteq [o(n,F), \mathrm{n}(n,F)]$$

va demak

$\left[o(n,F),\mathrm{n}(n,F)\right]=n(n,F)$

Endi, $t(n,F)=o(n,F)+n(n,F)$ bo‘lganligi sababli:

$$\left[o(n,F)+n(n,F),o(n,F)+n(n,F)\right]=\left[o(n,F),o(n,F)\right]+$$
$$+\left[n(n,F),n(n,F)\right]+\left[o(n,F),n(n,F)\right]+\left[o(n,F),n(n,F)\right]$$

Bu yerda:

- $\left[o(n,F),o(n,F)\right]=0$
- $\left[n(n,F),n(n,F)\right]=0$

Shuning uchun:

$0+0+\left[o(n,F),n(n,F)\right]\subseteq n(n,F)$

Aksincha:

$n(n,F)=\left[o(n,\mathrm{F}),n(n,F)\right]\subseteq\left[t(n,F),t(n,F)\right]$

Demak:

$\left[t(n,F),t(n,F)\right]=n(n,F)$

va natijada:

$t(n,F)=o(n,F)+n(n,F)$ [1]

Muhokama. Klassik Li algebralari algebraik strukturalarning eng muhim sinflaridan biri hisoblanadi. Ular matematik fizika, differensial geometriya hamda kvant nazariyasida keng qo‘llaniladi.

Maxsus chiziqli algebralar determinantni saqlovchi chiziqli almashtirishlar bilan bog‘liq bo‘lsa, ortogonal algebralar Evklid fazosidagi aylanish simmetriyalarini tavsiflaydi. Simplektik algebralar esa Hamilton mexanikasining algebraik asosini tashkil qiladi.

Tadqiqot natijalari klassik Li algebralarining strukturaviy jihatdan mukammal va chuqur algebraik obyekt ekanligini ko‘rsatdi. Ularning sodda va yarim sodda algebralar nazariyasidagi roli alohida ahamiyatga ega.

Xulosa. Mazkur maqolada klassik Li algebralari va strukturaviy xossalari o‘rganildi. Chiziqli Li algebra $gl(V)$ ning qism algebrasi, (A_l) V fazodagi izi nolga teng bo‘lgan barcha endomorfizmlar to‘plami $sl(V)$ (maxsus chiziqli algebra), ikki Li algebra yig‘indisi, bazis va ortogonal algebra $gl(V)$ ning ta’riflari, o‘lchamlari hamda algebraik xossalari tahlil qilindi. Klassik Li algebralari zamonaviy algebra nazariyasining asosiy yo‘nalishlaridan biri bo‘lib, kelgusida ularning tasvirlari, modullari va klassifikatsiyasini yanada chuqurroq o‘rganish muhim ilmiy ahamiyat kasb etadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Talley, Amanda Renee, "An Introduction to Lie Algebra" (2017). Electronic Theses, Projects, and Dissertations. 591.
2. Jumaniyozov Dostonning «Oddiy Li algebralarida lokal avtomorfizmlar». Bitiruv malakviy ishi 2018.
3. Р.Н.Назаров, Б.Т.Тошпулатов, А.Д.Дусумбетов Алгебра ва сонлар назарияси I кисм Тошкент “Укитувчи” 1993.

COMPARATIVE ANALYSIS OF DENOISING METHODS FOR BRAIN FLAIR MRI IMAGES: GAUSSIAN, MEDIAN, NLM, BM3D AND HYBRID APPROACH

Kambarov Bakhriddin Panji ugli[1], Khurramov Ruslan Erkin ugli[2], Makhamatdinov Abdul-Aziz Karamatdinovich[3]

[1]PhD student at the Tashkent State University of Economics, qambarov.b.p1997@gmail.com,

[2]Lecturer at the Department of Information Technologies and Exact Sciences, Termez University of Economics and Service, ruslanxurramov852@gmail.com,

[3]PhD student at the Tashkent State University of Economics.

https://doi.org/10.5281/zenodo.20610578

Annotatsiya. *Ushbu maqolada bosh miya FLAIR MRT tasvirlarini shovqindan tozalashning 4 ta klassik usuli - Gaussian filtri, Median filtri, NLM (Non-Local Means), BM3D va gibrid (Gauss+Median) yondashuvi - qiyosiy tahlil qilingan. Tadqiqot real FLAIR T2 MRT tasviri (512×512, DICOM format) asosida olib borildi. Sifat baholashda PSNR va SSIM metrikalari qo'llanildi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, NLM usuli PSNR=45.30 dB va SSIM=0.9735 ko'rsatkichlari bilan barcha usullardan, shu jumladan gibrid kombinatsiyalardan ham ustun keldi. Gibrid Median+NLM usuli PSNR=37.19 dB natija berdi. Tadqiqot natijalari FLAIR MRT rasmlarini shovqindan tozalashda NLM usulidan foydalanish samarali ekanligini tasdiqlaydi.*

Kalit so'zlar: *MRI denoising, FLAIR MRI, Gaussian filter, Median filter, Non-Local Means, BM3D, PSNR, SSIM*

Аннотация*. В данной работе представлен сравнительный анализ четырёх классических методов шумоподавления - фильтра Гаусса, медианного фильтра, метода нелокальных средних (NLM) и алгоритма BM3D - а также гибридного подхода (Gaussian + Median), применяемых к FLAIR-изображениям МРТ головного мозга. Исследование проводилось на реальном FLAIR T2 МРТ-снимке (512×512 пикселей, формат DICOM). Для объективной оценки качества шумоподавления использовались метрики пикового отношения сигнал/шум (PSNR) и индекса структурного сходства (SSIM). Экспериментальные результаты показывают, что метод NLM продемонстрировал наилучшие показатели: PSNR = 45,30 дБ и SSIM = 0,9735, превзойдя все остальные методы, включая гибридные комбинации. Гибридный подход Median + NLM показал PSNR = 37,19 дБ. Полученные результаты подтверждают, что метод нелокальных средних является наиболее эффективным алгоритмом шумоподавления для МРТ-изображений головного мозга и рекомендуется для применения в клинической визуализации и конвейерах предварительной обработки данных.*

Ключевые слова: *шумоподавление МРТ, FLAIR МРТ, фильтр Гаусса, медианный фильтр, метод нелокальных средних, BM3D, PSNR, SSIM*

Abstract. *This paper presents a comparative analysis of four classical denoising methods - Gaussian filter, Median filter, Non-Local Means (NLM), BM3D, and a hybrid (Gaussian+Median) approach - applied to brain FLAIR MRI images. The study was conducted on a real FLAIR T2 MRI scan (512×512, DICOM format). Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR) and Structural Similarity Index (SSIM) metrics were used to evaluate denoising quality. Experimental results demonstrate that NLM achieved the highest performance with PSNR=45.30*

dB and SSIM=0.9735, outperforming all methods including hybrid combinations. The hybrid Median+NLM approach yielded PSNR=37.19 dB. The findings confirm that NLM is the most effective method for denoising brain FLAIR MRI images and is recommended for clinical imaging preprocessing pipelines.

Keywords: *MRI denoising, FLAIR MRI, Gaussian filter, Median filter, Non-Local Means, BM3D, PSNR, SSIM*

Introduction: Magnetic resonance imaging (MRI) is a widely used non-invasive imaging technique that provides detailed structural information and functional characteristics of internal organs [1]. Deep analysis of magnetic resonance imaging (MRI) data plays a crucial role in clinical decision-making processes, particularly in the planning of surgical procedures. However, the presence of noise in MRI images leads to a degradation of image quality, which adversely affects image processing and analysis stages, including segmentation, classification, and visualization. As a result, the level of diagnostic accuracy decreases, and the risk of incorrect conclusions increases.Therefore, in order to ensure effective subsequent image processing and achieve reliable results, it is essential to reduce or eliminate noise in MRI images at the initial stage [2]. Noise is present in almost all types of image data; however, its sources and characteristics vary depending on the imaging modality and acquisition process. In medical imaging, particularly MRI, common noise sources include thermal noise, Gaussian noise, and scanner-related noise [3]. Gaussian noise is another type of noise which is additive and independent. The noisy image is as expressed in

$$In\ i,j = I\ i,j + n(i,j) \quad (1)$$

where In is the noisy image, I is the original image and n defines the additive noise [4].

Various classical denoising methods have been widely applied to reduce noise and improve image quality. Although these approaches demonstrate a certain level of effectiveness in noise removal, their performance on real brain FLAIR MRI images has not been sufficiently investigated through systematic evaluation using quantitative metrics. This study aims to address this gap by comparatively analyzing the performance of several classical denoising methods on a real FLAIR T2 MRI image. The results are evaluated using quantitative metrics such as PSNR and SSIM.

Methodology: Noise reduction in MRI Images has been an important field of research for years and this has led to the creation of different denoising methods. These methods can be categorized into traditional filtering approaches, patch-based statistical methods, model-driven frameworks like BM3D, and newer deep learning techniques [5]. The Gaussian filter is a popular smoothing filter used to reduce noise and blur in images. It operates by convolving the image with a Gaussian kernel, which is a two-dimensional Gaussian distribution [6]. Equation (2) shows the Gaussian filter formula

$$G(x,y) = 1/(2\pi\sigma^2) \cdot exp(-(x^2+y^2)/2\sigma^2) \quad (2)$$

where σ is the standard deviation of the distribution, assuming the distribution has a mean of zero at x = 0. The distribution is shown in image - 1.

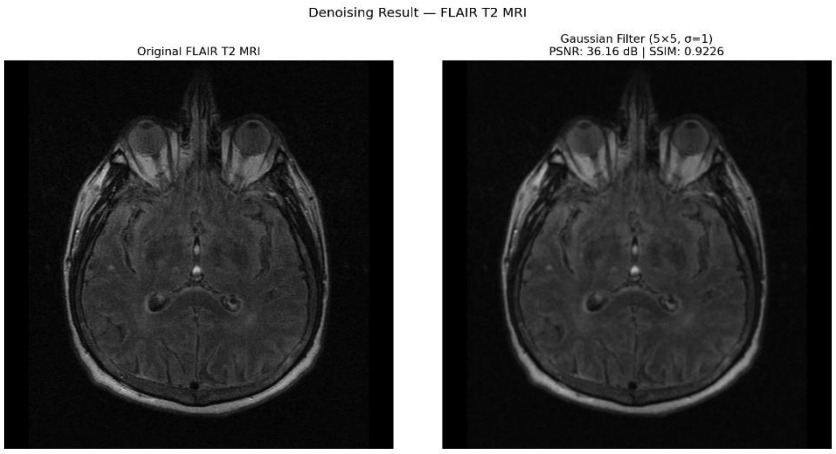


image-1

Median filtering is widely used for eliminating impulse (salt-and-pepper) noise by replacing each pixel value with the median of its neighboring pixels. This non-linear approach preserves edges more effectively than Gaussian filtering. However, when applied to continuous-tone images such as MRI, it may distort fine textures and suppress low-contrast features, potentially affecting diagnostic accuracy [7].Equation (3) presents the median filter formulation:

$$I'(x,y) = \text{median}\{ I(i,j) \mid (i,j) \in \mathcal{N}(x,y) \} \qquad (3)$$

where $I'(x,y)$is the filtered image, $I(i,j)$represents the intensity values of pixels within the neighborhood $\mathcal{N}(x,y)$, and the median operator selects the middle value after sorting the intensities within the window.

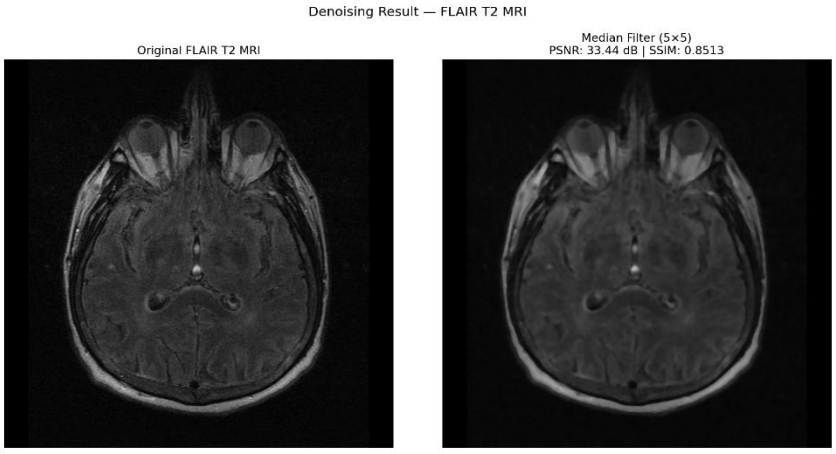


image-2

The Non-Local Means (NLM) algorithm estimates each pixel value as a weighted average of all pixels in the image, where the weights are determined by the similarity between local neighborhoods (patches), enabling effective noise reduction while preserving fine structures [8]. Given a discrete noisy image $v = \{v(i) \mid i \in I\}$, (4) the estimated value at pixel i, denoted as $NL[v](i)$, is computed as a weighted average of all pixels in the image:

$$NL[v](i) = \sum_{j \in I} w(i,j)\, v(j), \qquad (5)$$

where $w(i,j)$are the weighting coefficients that depend on the similarity between pixels $i$and j. These weights satisfy the following conditions:

$$0 \leq w(i,j) \leq 1, \qquad (6)$$

$$\sum_{j\in I} w(i,j) = 1. \quad (7)$$

The weights are typically defined as:

$$w(i,j) = \frac{1}{Z(i)} \exp\left(0 - \frac{\|v(N_i) - v(N_j)\|^2}{h^2}\right), \quad (8)$$

where

$v(N_i)$and $v(N_j)$denote the intensity vectors of square neighborhoods (patches) centered at pixels $i$and j,

$h$is the filtering parameter controlling the degree of smoothing,

$Z(i)$is a normalization constant given by:

$$Z(i) = \sum_{j\in I} \exp\left(0 - \frac{\|v(N_i) - v(N_j)\|^2}{h^2}\right). \quad (9)$$

Here, $N_k$represents a square neighborhood of fixed size centered at pixel k.

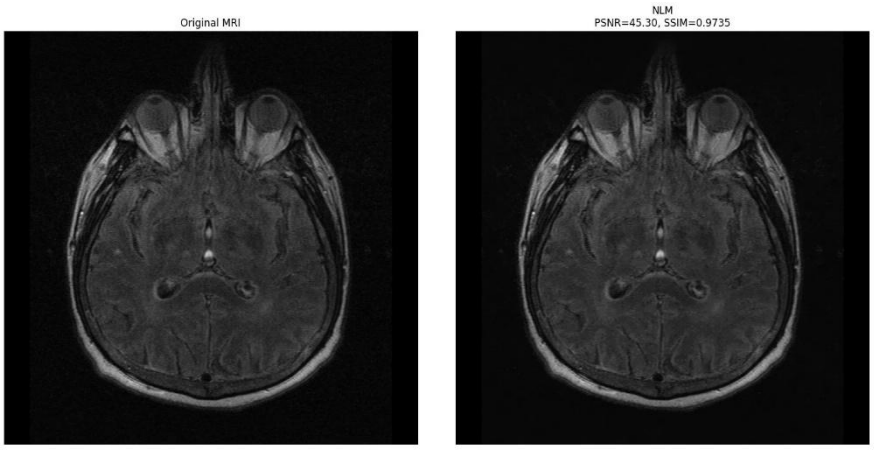


image-3

The Block-Matching and 3D filtering (BM3D) algorithm is one of the most advanced and widely used image denoising techniques, known for its high efficiency in suppressing noise while preserving fine structural details and textures. The core idea of BM3D is to group similar image patches into 3D stacks and perform collaborative filtering in the transform domain. This approach exploits the non-local self-similarity property of images, enabling effective separation of signal and noise components. The BM3D algorithm operates in two main stages: a basic estimation stage based on hard-thresholding and a final estimation stage based on Wiener filtering. Both stages involve a 3D transform and its inverse applied to grouped similar patches [9]. The overall BM3D framework can be expressed as:

$$\hat{X} = \mathcal{T}_{3D}^{-1}\left(\Phi(\mathcal{T}_{3D}(Y))\right) \quad (10)$$

where Ydenotes the noisy image, $\mathcal{T}_{3D}$and $\mathcal{T}_{3D}^{-1}$represent the forward and inverse 3D transforms, respectively, and $\Phi(\cdot)$denotes the shrinkage operator applied in the transform domain.

Stage 1: Hard-Thresholding (Basic Estimate)

$$\hat{X}^{basic} = T_{3D}^{-1}\left(\gamma(T_{3D}(\mathrm{Y}))\right) \quad (11)$$

In this stage, a coarse estimate of the clean image is obtained by applying hard-thresholding $\gamma(\cdot)$to the transform-domain coefficients, effectively removing noise-dominated components.

Stage 2: Wiener Filtering (Final Estimate)

$$\hat{X} = T_{3D}^{-1}(\mathrm{W} \cdot T_{3D}(\mathrm{Y})) \qquad (12)$$

where the Wiener weights are defined as:

$$W = \frac{|T_{3D}(\hat{X}^{basic})|^2}{|T_{3D}(\hat{X}^{basic})|^2 + \sigma^2} \qquad (13)$$

Here, $\hat{X}^{basic}$is the basic estimate obtained from the first stage, and σ^2represents the noise variance. The Wiener filtering stage refines the denoised result by adaptively weighting the transform coefficients based on the estimated signal-to-noise ratio.

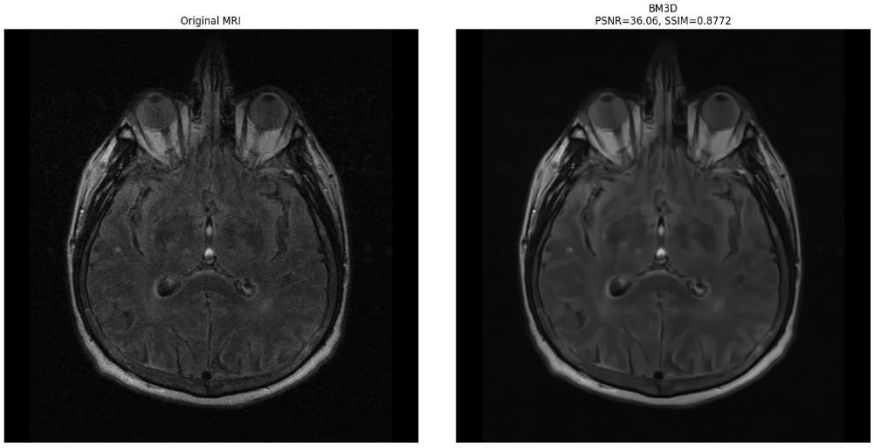


image 4

The two-stage structure of BM3D, combining hard-thresholding and Wiener filtering in the transform domain, enables superior denoising performance by effectively balancing noise suppression and detail preservation.

In addition to the classical denoising methods, a sequential hybrid Median+NLM approach was also evaluated in this study. This hybrid strategy was designed to first suppress local impulse-like noise using median filtering and then refine the image using the NLM algorithm. However, the experimental results showed that this combination did not outperform the standalone NLM method. This may be explained by the fact that the median filtering stage tends to suppress fine textures and low-contrast structures, which reduces the effectiveness of the subsequent NLM stage that relies on neighborhood similarity for detail preservation (image 5).

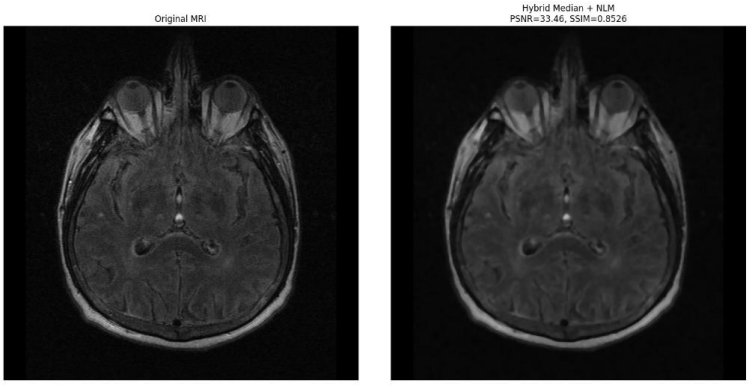


image – 5

To objectively assess the denoising performance, quantitative evaluation metrics including Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR) and Structural Similarity Index Measure (SSIM) were employed. PSNR reflects the fidelity of pixel intensity reconstruction, whereas SSIM assesses the preservation of structural and perceptual information in the image.

Mean Squared Error (MSE) is a simple metric that calculates the average squared difference between the pixel values of two images.

MSE is defined as:

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(I_1 - I_2)^2 \quad (14)$$

where $I_1$and I_2represent the pixel values of the two images, and $n$denotes the total number of pixels.

A lower MSE value indicates better image quality. The term "better image quality" refers to how clearly and accurately an image represents the original object or scene, including the level of detail and visual fidelity [10].

Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR) is a widely used metric for evaluating the quality of reconstructed images. It is defined by comparing the maximum possible signal value of the original (ground truth) image with the error introduced by the reconstruction algorithm.

Mathematically, PSNR is expressed as:

$$PSNR = 20 \cdot \log_{10}(MAX_I) - 10 \cdot \log_{10}(MSE) \quad (15)$$

where MAX_Idenotes the maximum possible intensity value among the red, green, and blue components in an RGB image. In the case of 8-bit images, this value is equal to 255.

The term MSErepresents the Mean Squared Error between the reconstructed high-resolution (HR) image and the ground truth image in terms of pixel intensity values.

PSNR is measured in decibels (dB), and higher PSNR values indicate better image quality [10].

The Structural Similarity Index Measure (SSIM) evaluates the similarity between two images or videos — the original and the reconstructed image. SSIM is defined as:

$$SSIM(x,y) = [l(x,y)]^{\alpha} \cdot [c(x,y)]^{\beta} \cdot [s(x,y)]^{\gamma} \quad (16)$$

where $x$and $y$represent the two images being compared, and higher SSIM values indicate better image quality.

In this formulation, different components are used to compare the images:

- $l$denotes luminance and compares the overall brightness of the images;
- $c$represents contrast and measures the difference between the brightest and darkest regions;
- $s$refers to structure and evaluates the similarity of local intensity patterns.

Additionally, the equation includes three positive constants α, β, and γ.

SSIM is considered more suitable than PSNR for evaluating the perceptual quality of super-resolution (SR) algorithms, as it correlates better with human visual perception. However, SSIM is computationally more complex than PSNR, as it requires the calculation of local statistics [10].

Results and discussion: In this research, four conventional denoising techniques (Gaussian, Median, NLM, BM3D) along with one hybrid approach (Median+NLM) were employed to remove noise from images. The experiments were performed on a single real FLAIR T2 MRI

image, and the results were assessed using PSNR and SSIM evaluation metrics. The numerical results are shown in Table 1.

Table 1. Quantitative comparison of denoising methods on FLAIR T2 MRI image

Method	**PSNR (dB)**	**SSIM**
NLM	**45.30**	**0.9735**
Median	37.25	0.9251
Hybrid M+NLM	37.19	0.9224
Gaussian	36.16	0.9226
BM3D	34.16	0.8400

As can be seen from the table, the Non-Local Means (NLM) algorithm outperformed all other methods, achieving the highest performance metrics. The method attained PSNR = 45.30 dB and SSIM = 0.9735 values, indicating that it successfully reduced noise while maintaining high fidelity of structural details in the image. This superior performance is attributed to the NLM algorithm's capability to exploit similarities across distant regions of the image.

The Median filter also yielded relatively satisfactory results, validating its efficiency in attenuating impulse-type noise. Nevertheless, owing to the partial smoothing of fine textures, it produced inferior performance metrics compared to NLM.

The hybrid Median+NLM approach, unexpectedly, failed to achieve superior results. Conversely, it exhibited performance degradation relative to the standalone NLM method. This can be attributed to the loss of fine and critical structural features during the median filtering stage, which subsequently diminished the efficacy of the NLM algorithm.

The Gaussian filter exhibited moderate performance, reducing noise through image smoothing; however, this process inadvertently blurred important structural details.

The BM3D algorithm showed the poorest performance among all tested methods. This result may be attributed to non-optimal parameter configuration or its sensitivity to the noise characteristics inherent in real MRI acquisitions.

Experimental results demonstrate that NLM achieved the highest PSNR of 45.30 dB and SSIM of 0.9735 on the FLAIR T2 MRI image, outperforming all classical and hybrid filtering approaches. Hybrid combinations did not improve upon standalone NLM performance, suggesting that NLM alone is sufficient for effective denoising of FLAIR MRI images.

REFERENCES

[1] N. Srivastava, G. Ranjan Sahoo, H. U. Voss, S. N. Niogi, J. H. Freed, and M. Srivastava, "MRI Denoising Using Pixel-Wise Threshold Selection," *IEEE Access*, vol. 12, pp. 135730–135745, 2024, doi: 10.1109/ACCESS.2024.3449811.

[2] J. Yang, J. Fan, D. Ai, S. Zhou, S. Tang, and Y. Wang, "Brain MR image denoising for Rician noise using pre-smooth non-local means filter," *Biomed. Eng. Online*, vol. 14, no. 1, pp. 1–20, 2015, doi: 10.1186/1475-925X-14-2.

[3] M. Mafi, H. Martin, M. Cabrerizo, J. Andrian, A. Barreto, and M. Adjouadi, "A comprehensive survey on impulse and Gaussian denoising filters for digital images," *Signal Processing*, vol. 157, pp. 236–260, 2019, doi: 10.1016/j.sigpro.2018.12.006.

[4] M. Mafi *et al.*, "Survey on mixed impulse and Gaussian denoising filters," *IET Image Process.*, vol. 14, no. 16, 2020, doi: 10.1049/iet-ipr.2018.6335.

[5] S. Uma Maheswari, V. S. Vaidyanath, M. Sudiksha, and R. Praveen Kumar, “Comparative Analysis of Classical, Hybrid, and Deep Learning Approaches for MRI Image Denoising under Gaussian and Rician Noise,” *Journal of Innovative Image Processing*, vol. 7, no. 3, pp. 991–1014, 2025, doi: 10.36548/jiip.2025.3.022.

[6] K. L. Lew, C. Y. Kew, K. S. Sim, and S. C. Tan, “Adaptive Gaussian Wiener Filter for CT-Scan Images with Gaussian Noise Variance,” *Journal of Informatics and Web Engineering*, vol. 3, no. 1, pp. 169–181, 2024, doi: 10.33093/jiwe.2024.3.1.11.

[7] H. Limbong, Lailan Sofinah Harahap, and Rafli Arya Gading, “Comparison of Median Filter and Gaussian Filter Performance in Removing Salt and Pepper Noise,” *Journal of Artificial Intelligence and Engineering Applications (JAIEA)*, vol. 4, no. 3, pp. 1849–1854, 2025, doi: 10.59934/jaiea.v4i3.1033.

[8] J. Wang, Y. Guo, Y. Ying, Y. Liu, and Q. Peng, “Fast non-local algorithm for image denoising,” *Proceedings - International Conference on Image Processing, ICIP*, no. 0, pp. 1429–1432, 2006, doi: 10.1109/ICIP.2006.312698.

[9] M. Hasan and M. R. El-Sakka, “Improved BM3D image denoising using SSIM-optimized Wiener filter,” *EURASIP J. Image Video Process.*, vol. 2018, no. 1, 2018, doi: 10.1186/s13640-018-0264-z.

[10] M. Arabboev, S. Begmatov, M. Rikhsivoev, K. Nosirov, and S. Saydiakbarov, “A comprehensive review of image super-resolution metrics: classical and AI-based approaches,” *Acta IMEKO*, vol. 13, no. 1, pp. 1–8, 2024, doi: 10.21014/ACTAIMEKO.V13I1.1679.

PAXTA TERISH MASHINASI HOSIL QILADIGAN BUTUN TANAGA TA’SIR QILUVCHI TEBRANISHLARNING OPERATOR ISH SAMARADORLIGIGA TA’SIRINI TAXLILI

Kubayev Saydazim Tashbayevich[1], Toshboyev Jahongir Saydazim o‘g‘li[2]
[1]TATU Samarqand filiali dotsenti,
[2]Raqamli texnalogiyalar va suniy intelektni rivojlantirish ilmiy tadqiqot instituti stajiyor tadqiqotchisi.
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610604

Annotatsiya. *Ushbu maqolada paxta terish mashinalari ostovida yuzaga keladigan tebranishlarning shakllanish mexanizmlari hamda ularning operatorning fiziologik va psixofiziologik holatiga ta’siri tahlil qilingan. Xorijiy va mahalliy ilmiy tadqiqotlar asosida butun tanani qamrab oluvchi tebranishlarning inson salomatligiga salbiy ta’siri ko‘rsatib berilgan. ISO 2631-1 xalqaro standarti asosida tebranishlarni baholash usullari va ularni kamaytirish bo‘yicha konstruktiv yechimlar muhokama qilingan. Olingan natijalar paxta terish mashinalarini takomillashtirishda amaliy ahamiyatga ega.*

Kalit so‘zlar: *paxta terish mashinasi, tebranish, ostov, operator, butun tanali tebranish, vibroizolyatsiya.*

1. KIRISH

Qishloq xo‘jaligi mexanizatsiyasi global miqyosda ishlab chiqarish samaradorligini oshirish va insoniylik omilni kamaytirishda muhim ahamiyatga ega. Bugungi kunda paxtachilik sohasida paxta hosilini yig‘ib-terish jarayonida mexanizatsiya darajasini oshirishga ko‘plab davlatlar e’tibor qaratmoqda. Masalan, O‘zbekistonda paxta terishni mexanizatsiyalash bo‘yicha 2020–2026 yillar uchun maxsus chora-tadbirlar va dasturlar qabul qilingan bo‘lib, paxta terish mashinalari parklarini kengaytirish hamda ulardan samarali foydalanishni ta’minlash maqsad qilingan.

Paxta terish mashinalari qo‘l mehnatini sezilarli darajada qisqartirib, ish samaradorligini oshiradi. Mashinada kuniga 20–40 tonnadan ortiq paxta terib olish mumkin. Bu esa an’anaviy qo‘l mehnatiga nisbatan katta afzallik bo‘lib, farovon ishlab chiqarishni ta’minlaydi.

Biroq paxta terish mashinalarining ish samaradorligi bilan bir qatorda, operatorlar mehnat sharoiti va salomatligi masalasi ham dolzarb ilmiy tadqiqot mavzusidir. Texnikada yuzaga keladigan mexanik tebranishlar, shovqin va boshqa dinamik ta’sirlar inson organizmiga salbiy ta’sir ko‘rsatadi. Tebranish operatorlarning markaziy asab tizimi, mushak-suyak apparati va qon aylanish tizimida turli funksional buzilishlarga olib kelishi mumkin. Agrar sohada tobora keng tarqalgan whole-body vibration (WBV) – tana bo‘yicha ta’sir etuvchi tebranishlar – mashina operatorlarida charchoqni oshiradi, ish qobiliyatini kamaytiradi va salomatlik holatini bo‘zadi. Xalqaro mehnat tashkiloti ma’lumotlariga ko‘ra, qishloq xo‘jaligi ishchilarining 38 % atrofida tabiiy shartlar va mashinalar ta’sirida tebranishga duch keladi.

Ilmiy adabiyotlarda ham tebranish va undan kelib chiqadigan kasalliklar tadqiq etilgan. Qishloq xo‘jaligi sohasida mashinalar ta’siridagi tebranish operatorlarda hand-arm vibration syndrome (HAVS) kabi kasalliklarning yuzaga kelish xavfini oshiradi, bu esa tizimli charchoq, qon aylanishi va nevropatik belgilar bilan namoyon bo‘ladi.

Paxta industriyasidagi mashinalar tomonidan yuzaga keladigan shovqin va tebranishlar operator salomatligiga salbiy ta’sir ko‘rsatib, fiziologik holat va mehnat sharoitini yomonlashtirishi aniqlangan bo‘lib, shu sababli zamonaviy qishloq xo‘jaligi mashinalarini loyihalashda inson–mashina integratsiyasi, ergonomika va xavfsizlik omillarini hisobga olgan holda tebranish va shovqinni kamaytirish orqali ish samaradorligi hamda iqtisodiy ko‘rsatkichlarni oshirish muhim hisoblanadi va mazkur maqolada paxta terish mashinalarida yuzaga keladigan mexanik tebranishlarning sabablari, ularning operatorga ta’siri hamda kamaytirish usullari ilmiy asosda yoritiladi.

2. ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYA

2.1. Paxta terish mashinalarida tebranishlar yuzaga kelishining nazariy asoslari.

Zamonaviy qishloq xo‘jaligi mashinalari, jumladan paxta terish mashinalari, ko‘p omilli va murakkab dinamik tizimlar hisoblanadi. Bunday mashinalar bir vaqtning o‘zida bir nechta o‘zaro bog‘langan mexanik va kinematik elementlardan tashkil topgan bo‘lib, ularning ish jarayonida turli xil dinamik yuklanishlar va tebranishlar yuzaga keladi. Ushbu tebranishlar mexanik tizimlar nazariyasi asosida, ya’ni erkin va majburiy tebranishlar nuqtai nazaridan tahlil qilinadi. Erkin tebranishlar tizimga tashqi ta’sirsiz, faqat ichki energiya hisobiga yuzaga kelsa, majburiy tebranishlar tashqi kuchlar ta’sirida shakllanadi va ular ish jarayonida doimiy ravishda kuzatiladi [1].

Tebranish jarayonlari mashina konstruksiyasining qattiqligi, massa taqsimoti va dempfirlash xususiyatlariga bevosita bog‘liq bo‘lib, bu parametrlar tebranish amplitudasi va chastotasiga hal qiluvchi ta’sir ko‘rsatadi [1]. Qattiqlikning kamayishi tabiiy chastotani pasaytirib, rezonans ehtimolini oshiradi, massa taqsimotining noteksligi esa inersion kuchlar ortishiga va qo‘shimcha yuklanishlarga olib keladi. Dempfirlash koeffitsiyenti tebranishlarni so‘ndirish darajasini belgilaydi: u qanchalik katta bo‘lsa, amplituda shunchalik tez kamayadi. Ushbu omillar o‘zaro ta’sirida murakkab tebranish rejimlari shakllanadi va ularni tahlil qilishda matematik modellashtirish muhim ahamiyatga ega.

Inson–mashina tizimi tadqiqotlarida inson organizmi mustaqil emas, balki butun tizimning ajralmas qismi sifatida dinamik tizim ko‘rinishida qaraladi. Michael J. Griffin tadqiqotlariga ko‘ra, inson tanasi turli qismlarining o‘z tabiiy (rezonans) chastotalariga ega bo‘lgan murakkab biomexanik tizimdir. Ayniqsa, 1–10 Gs diapazonidagi tebranishlar eng xavfli bo‘lib, bu diapazonda rezonans yuzaga kelib, ta’sir kuchayadi va operatorda charchoq hamda ish qobiliyati pasayishiga, uzoq muddatda esa kasbiy kasalliklarga olib kelishi mumkin.

Shu bois, mashina–yer–o‘rindiq–operator tizimini yagona dinamik tizim sifatida ko‘rib chiqish muhim. Tebranishlar yerdan mashinaga, undan o‘rindiq orqali operatorga uzatiladi va ularning ta’siri amplituda, chastota, yo‘nalish hamda davomiylikka bog‘liq bo‘ladi. Masalan, vertikal tebranishlar umurtqaga, gorizontallari esa muvozanat va koordinatsiyaga salbiy ta’sir qiladi. Shuningdek, o‘rindiq konstruksiyasi va dempfirlash xususiyatlari tebranishlarni kamaytirishda muhim ahamiyatga ega [2].

Rezonans holati mexanik va biomexanik tizimlarda eng xavfli dinamik hodisalardan biri hisoblanadi. U tashqi ta’sir chastotasi inson tanasining tabiiy (rezonans) chastotasiga mos kelganda yuzaga kelib, natijada tebranish amplitudasi keskin ortib ketadi. Bunday sharoitda inson organizmida dinamik yuklanishlar ortib, markaziy asab tizimiga salbiy ta’sir ko‘rsatiladi, bu esa tez charchash, diqqatning susayishi va ish qobiliyatining pasayishiga olib keladi. Uzoq muddatli ta’sir esa kasbiy kasalliklar, ayniqsa umurtqa pog‘onasi va mushak-skelet tizimi bilan bog‘liq muammolarning kelib chiqishiga sabab bo‘lishi mumkin[3].

Qishloq xo‘jaligi mashinalarida, jumladan paxta terish mashinalarida tebranishlarning paydo bo‘lishi ko‘plab ichki va tashqi omillarga bog‘liq. Asosiy manbalar sifatida dvigatel ishidan kelib chiqadigan dinamik kuchlar, ishchi organlar harakati va yer relefining notekisligi qaraladi. Ayniqsa, notekis yer sharoitida harakatlanishda paxta terish mashina g‘ildiraklari orqali uzatiladigan ta’sirlar tebranishlarning asosiy tashqi manbai bo‘lib xizmat qiladi va butun konstruksiya bo‘ylab tarqaladi [4].

Tebranish darajasi faqat manbalar bilan cheklanib qolmay, balki paxta terish mashinaning ekspluatatsion va konstruktiv parametrlariga ham bevosita bog‘liq bo‘ladi. Jumladan, ish rejimi, harakat tezligi, agregatlar aylanish chastotasi, massa taqsimoti va konstruksiyaning qattiqligi kabi omillar tebranish intensivligini belgilaydi [5]. Harakat tezligining ortishi dinamik yuklanishlarni ko‘paytirsa, konstruksiya parametrlarining noto‘g‘ri tanlanishi rezonans holatlarining yuzaga kelish ehtimolini oshiradi. Shu sababli tebranishlarni samarali kamaytirish uchun ushbu omillarni kompleks ravishda hisobga olish va optimallashtirish zarur hisoblanadi.

Paxta terish mashinasi konstruksiyasining dinamik xususiyatlarini baholashda uning tabiiy (erkin) chastotalarini aniqlash va ularni ishchi organlar harakat chastotalari bilan solishtirish muhim ahamiyatga ega. Bu yondashuv orqali tizimda yuzaga kelishi mumkin bo‘lgan xavfli dinamik holatlar oldindan aniqlanadi. Agar ishchi organlardan kelib chiqadigan majburiy tebranishlar chastotasi konstruksiyaning tabiiy chastotasiga yaqinlashsa yoki u bilan mos kelsa, rezonans holati yuzaga keladi. Natijada tebranish amplitudasi keskin ortib, konstruksiya elementlarida qo‘shimcha dinamik yuklanishlar paydo bo‘ladi, bu esa ularning tez yeyilishi, ishonchlilikning pasayishi va ayrim hollarda avariya holatlariga olib kelishi mumkin [6].

Dinamik holatlar ayniqsa paxta terish mashinasi operatori uchun xavfli hisoblanadi. Ilmiy tadqiqotlar shuni ko‘rsatadiki, 2–20 Gs diapazondagi tebranishlar inson tanasi, ayniqsa umurtqa pog‘onasi va mushak-skelet tizimiga salbiy ta’sir ko‘rsatadi. Ushbu diapazonda uzoq muddat ta’sir etuvchi tebranishlar operatorda charchash, og‘riqlar paydo bo‘lishi va mehnat samaradorligining pasayishiga sabab bo‘ladi. Shu bois, paxta terish mashinalarni loyihalashda inson omilini hisobga olish va xavfli chastotalar diapazonini kamaytirish muhim vazifalardan biri hisoblanadi [7].

Zamonaviy muhandislik amaliyotida paxta terish mashinasi konstruksiyasining tebranish xususiyatlarini chuqur tahlil qilish uchun chekli elementlar usuli (Finite Element Method – FEM) keng qo‘llaniladi. Ushbu usul yordamida konstruksiyaning tabiiy chastotalari, tebranish shakllari (modalari) va energiya taqsimoti aniqlanadi. Bu esa konstruksiya parametrlarini optimallashtirish, rezonans holatlarini bartaraf etish va tebranishlarni kamaytirish bo‘yicha samarali muhandislik yechimlarini ishlab chiqish imkonini beradi [8].

2.2. Butun tanani qamrab oluvchi tebranishlarning operator organizmiga fiziologik ta’siri.

Butun tanani qamrab oluvchi tebranishlar (Whole-Body Vibration – WBV) inson salomatligiga ta’siri nuqtai nazaridan keng ko‘lamda o‘rganilgan ilmiy yo‘nalishlardan biri hisoblanadi. Michael J. Griffin tadqiqotlarida inson tanasi ko‘p bo‘g‘inli murakkab biomexanik tizim sifatida qaralib, tebranish energiyasining tanada tarqalishi va rezonans hodisalari nazariy jihatdan asoslab berilgan. Unga ko‘ra, inson tanasining turli qismlari ma’lum tabiiy chastotalarga ega bo‘lib, ushbu chastotalarga mos keluvchi tashqi tebranishlar ta’sirida rezonans holatlari yuzaga keladi [2].

Ilmiy tadqiqotlar shuni ko‘rsatadiki, uzoq muddatli butun tanali tebranishlar inson organizmiga salbiy ta’sir ko‘rsatib, ayniqsa umurtqa pog‘onasi, mushak-skelet tizimi va ichki organlar faoliyatiga ta’sir qiladi. Xususan, 1–20 Gs diapazondagi tebranishlar inson tanasi uchun

eng xavfli hisoblanib, bu diapazonda uzoq vaqt ta’sir etuvchi tebranishlar charchash, og‘riqlar va funksional buzilishlarga olib kelishi mumkin [9].

World Health Organization (WHO) hamda International Organization for Standardization tomonidan ishlab chiqilgan xalqaro hujjatlarda qishloq xo‘jaligi va transport texnikasi operatorlarida WBV ta’siri natijasida kasbiy kasalliklar xavfi yuqori ekani ta’kidlangan [10]. Ushbu hujjatlarda tebranish ta’sirini baholash, meyorlashtirish va inson salomatligini muhofaza qilish bo‘yicha asosiy talablar belgilab berilgan.

Epidemiologik tadqiqotlarda butun tanali tebranishlar bilan bel sohasidagi og‘riqlar o‘rtasida barqaror bog‘liqlik mavjudligi aniqlangan. Jumladan, Marco Bovenzi va Carel T. Hulshof ishlarida WBV ta’siri va bel og‘riqlari o‘rtasida statistik jihatdan ahamiyatli bog‘liqlik qayd etilgan [3]. Shuningdek, qishloq xo‘jaligi texnikasi operatorlarida olib borilgan tadqiqotlar tebranish ta’siri charchoqni tezlashtirishi va ish qobiliyatini pasaytirishini ko‘rsatadi [4].

Tebranishlarning insonga uzatilishida o‘rindiq konstruksiyasi muhim rol o‘ynaydi. Ilmiy ishlar shuni ko‘rsatadiki, o‘rindiqning qattiqligi va suspenziya xususiyatlari inson tanasining tebranishga reaksiyasiga sezilarli ta’sir ko‘rsatadi [11]. Zamonaviy tadqiqotlarda o‘rindiq suspenziya tizimlarining vibroizolyatsiya samaradorligi eksperimental ravishda baholanib, tebranishlarni operatorga uzatilishini kamaytirish imkoniyatlari asoslab berilgan [12].

Qishloq xo‘jaligi sohasida olib borilgan tadqiqotlar ham ushbu nazariy xulosalarni tasdiqlaydi. Jumladan, traktor va paxta terish mashinalari operatorlarida butun tanali tebranishlar ta’siri natijasida charchash darajasining ortishi va mehnat samaradorligining pasayishi aniqlangan [7]. Bu esa WBV ta’sirini kamaytirish bo‘yicha texnik va konstruktiv yechimlarni ishlab chiqish zarurligini ko‘rsatadi.

Butun tanali tebranishlarning inson organizmiga ta’siri biomexanik, fiziologik va epidemiologik tadqiqotlar asosida to‘liq asoslangan bo‘lib, ushbu nazariyalar qishloq xo‘jaligi mashinalari operatorlari misolida ham o‘z tasdig‘ini topmoqda.

2.3. Tebranishlarning operator ish qobiliyati va psixofiziologik holatiga ta’siri.

Qishloq xo‘jaligi mashinalarida yuzaga keladigan tebranishlar operatorning jismoniy holatiga qo‘shimcha ravishda uning psixofiziologik xususiyatlariga ham sezilarli ta’sir ko‘rsatadi. Xorijiy tadqiqotlar shu masalani inson–mashina o‘zaro ta’siri nuqtai nazaridan chuqur o‘rgangan. Macdonald mehnat jarayonidagi yuklama va charchoq omillarini tahlil qilib, doimiy mexanik ta’sirlar, jumladan butun tanali tebranishlar, markaziy nerv tizimida funksional zo‘riqishni kuchaytirishini ko‘rsatgan. [13].

Eksperimental tadqiqotlar natijalari shuni ko‘rsatadiki, jismoniy va ruhiy stress ta’siri ostida inson mushak faoliyatida sezilarli o‘zgarishlar kuzatiladi. Xususan, organizm stress holatiga tushganda mushaklarning ishlash samaradorligi pasayadi, ularda charchoq tezroq namoyon bo‘ladi va harakatlar muvofiqligi buzilishi mumkin. Shu bilan birga, tadqiqotlarda tebranish kabi tashqi mexanik omillar ham insonning psixomotor reaksiyalariga salbiy ta’sir ko‘rsatishi ilmiy jihatdan isbotlangan. Bunday omillar ta’sirida reaksiya vaqti uzayadi, harakatlar aniqligi kamayadi va umumiy ish qobiliyati pasayishi kuzatiladi [14].

Bundan tashqari, [15] manbada yurak urishi variabelligi (Heart Rate Variability – HRV) tahlil qilinib, u orqali insonning funksional holatiga baho berilgan. Tadqiqot natijalariga ko‘ra, tashqi stress omillari ta’sirida HRV ko‘rsatkichlari o‘zgaradi, bu esa avtonom asab tizimi faoliyatidagi disbalansni anglatadi. Natijada insonda diqqatni jamlash qobiliyati susayadi, ma’lumotlarni qayta ishlash tezligi pasayadi va qaror qabul qilish jarayoni sekinlashadi. Bu holat ayniqsa yuqori diqqat va tezkor qaror talab etiladigan faoliyat turlarida samaradorlikka jiddiy ta’sir ko‘rsatishi mumkin.

Merat va Jamson [16] inson reaksiyasining tashqi stimullarga bog‘liqligini tahlil qilib, uzoq muddatli fizik ta’sir (jumladan WBV) signallarni qabul qilish va qayta ishlash samaradorligini kamaytirishini ko‘rsatgan. Ljung Aust va hammualliflar [6] professional haydovchilarda xulq-atvor va avariya holatlari o‘rtasidagi bog‘liqlikni o‘rganib, charchoq va diqqat pasayishi xavfsizlikka jiddiy tahdid solishini ko‘rsatgan. Bu holat qishloq xo‘jaligi mashinalari, shu jumladan paxta terish mashinalari operatorlari uchun ham dolzarb hisoblanadi.

Xorijiy olimlar tomonidan aniqlangan psixofiziologik ta’sir mexanizmlari mahalliy tadqiqotlarda paxta terish mashinalari operatorlari misolida to‘liq tasdiqlanib, bu masalaning amaliy ahamiyatini yanada oshiradi.

2.4. Tebranishlarni kamaytirish bo‘yicha xorijiy yechimlar va ularning paxta terish mashinalariga tatbiqi.

Tebranishlarni kamaytirish bo‘yicha xorijiy tadqiqotlar, asosan, konstruktiv yechimlar, passiv vibroizolyatsiya vositalari hamda aktiv boshqaruv tizimlarini ishlab chiqishga qaratilgan bo‘lib, bu yo‘nalishda so‘nggi yillarda sezilarli ilmiy natijalarga erishilgan. Ushbu yondashuvlar inson–mashina tizimidagi o‘zaro ta’sirni chuqur tahlil qilishga va operatorga tushadigan dinamik yuklamani minimallashtirishga xizmat qiladi.

Jumladan, Lines va Murphy [16] tomonidan o‘tkazilgan tadqiqotlarda o‘rindiq konstruksiyasining qattiqligi hamda dempfirlash koeffitsiyentlarini optimal tanlash orqali operatorga uzatiladigan tebranish darajasini sezilarli darajada kamaytirish mumkinligi ilmiy asoslab berilgan. Ular tomonidan taklif etilgan modellar amortizatsiya tizimining rezonans holatlarini bartaraf etishga yordam beradi va inson organizmiga tushadigan zararli ta’sirlarni kamaytiradi.

Qishloq xo‘jaligi texnikalari uchun mo‘ljallangan o‘rindiq suspenziyalarining vibroizolyatsion xususiyatlarini eksperimental sharoitda baholab, suspenziya parametrlarini to‘g‘ri tanlash operatorning charchash darajasini kamaytirish va ish jarayonidagi qulaylikni oshirishini ko‘rsatgan. Ular, ayniqsa, past chastotali tebranishlarni samarali so‘ndirishga qodir bo‘lgan ko‘p bosqichli suspenziya tizimlarining afzalliklarini ta’kidlagan [17].

Choi va Han [18] inson tanasining biomexanik modelini hisobga olgan holda aktiv elektoreologik (ER) suspenziya tizimlarini taklif etgan bo‘lib, bunday tizimlar real vaqt rejimida o‘z parametrlarini o‘zgartirish orqali tebranishlarni dinamik ravishda so‘ndirish imkonini beradi. Bu esa, ayniqsa, notekis yer sharoitida ishlaydigan mashinalar uchun yuqori samaradorlikni ta’minlaydi.

Kumar va Singh [5] chekli elementlar usulidan (Finite Element Method – FEM) foydalanib, konstruksiya elementlarining dinamik xususiyatlarini tahlil qilgan va ularni optimallashtirish orqali tebranishlarni kamaytirish imkoniyatlarini ko‘rsatib bergan. Bunday yondashuv mashinaning umumiy mustahkamligi va barqarorligini saqlagan holda uning vibratsion faolligini pasaytirishga yordam beradi.

Griffin inson organizmining tebranishlarga bo‘lgan sezgirligini o‘rganib, ergonomik standartlar asosida o‘rindiq va kabina konstruksiyalarini takomillashtirish zarurligini ta’kidlagan. Mansfield esa inson–tebranish o‘zaro ta’sirini matematik modellashtirish orqali operator xavfsizligini ta’minlashga qaratilgan yondashuvlarni ishlab chiqqan. Smith va boshqalar tomonidan yarim-aktiv (semi-active) suspenziya tizimlari taklif qilinib, ular energiya sarfini kamaytirgan holda yuqori vibroizolyatsiya samarasini ta’minlashi ko‘rsatilgan [13].

Shuningdek, zamonaviy traktor va kombaynlarda qo‘llanilayotgan pnevmatik suspenziyali o‘rindiqlar, gidravlik amortizatorlar hamda intellektual boshqaruv bloklari asosida ishlovchi adaptiv tizimlar operatorga uzatiladigan tebranishlarni kompleks ravishda kamaytirish

imkonini bermoqda. Ayrim tadqiqotlarda kabina ichidagi tebranishlarni kamaytirish uchun aktiv shovqin va tebranishni kompensatsiya qiluvchi tizimlar (Active Noise and Vibration Control – ANVC) ham samarali ekani qayd etilgan [20].

Yuqorida keltirilgan xorijiy yechimlarni mahalliy paxta terish mashinalari konstruksiyalariga tatbiq etish katta amaliy ahamiyatga ega. Xususan, o‘rindiq suspenziyasini takomillashtirish, konstruksiya elementlarini FEM orqali optimallashtirish, hamda yarim-aktiv yoki aktiv vibroizolyatsiya tizimlarini joriy etish orqali operatorning mehnat sharoitini sezilarli darajada yaxshilash mumkin. Bu esa o‘z navbatida operatorning charchashini kamaytiradi, diqqatni uzoq vaqt saqlash imkonini beradi va paxta terish jarayonida umumiy ish samaradorligini oshirishga xizmat qiladi.

Xorijiy olimlar tomonidan ishlab chiqilgan zamonaviy vibroizolyatsiya va suspenziya yechimlari mahalliy paxta terish mashinalari konstruksiyalariga tatbiq etilishi mumkin bo‘lib, bu operator mehnat sharoitini yaxshilash va ish samaradorligini oshirishga xizmat qiladi.

3. XULOSA

Olib borilgan ilmiy tadqiqotlar asosida quyidagi xulosalarga kelish mumkin:

Olib borilgan nazariy va eksperimental tadqiqotlar shuni ko‘rsatdiki, paxta terish mashinalaridagi tebranishlar ko‘p omilli va murakkab dinamik jarayon bo‘lib, ular yer relefi, ishchi organlar harakati va dvigatel hamda uzatma mexanizmlari xususiyatlari ta’sirida shakllanadi. Bu tebranishlar ostov orqali o‘rindiqqa, undan esa operator tanasiga uzatilib, butun tanali tebranish (WBV) ko‘rinishida namoyon bo‘ladi. Tizimning dinamik tahlili uning tabiiy chastotasi inson uchun sezgir diapazonga to‘g‘ri kelishini va rezonans holatlari ehtimolini oshirishini ko‘rsatdi.

ISO 2631-1 standarti asosida o‘tkazilgan o‘lchashlar ayrim ish rejimlarida tebranish darajasi meyoriy qiymatlarga yaqinlashishi yoki oshishini ko‘rsatdi. Ayniqsa, notekis yerlarda va yuqori tezlikda vertikal tebranishlar yuqori bo‘lib, bu operator salomatligiga salbiy ta’sir ko‘rsatadi. Natijada charchoq, mushak va bel og‘riqlari paydo bo‘ladi, shuningdek diqqat susayib, reaksiya vaqti va qaror qabul qilish samaradorligi pasayadi.

Tahlillar mashinalar konstruksiyasida dinamik xususiyatlarni hisobga olish zarurligini ko‘rsatdi. Ostov qattiqligini optimallashtirish, o‘rindiq suspenziyasini takomillashtirish va zamonaviy vibroizolyatsiya vositalarini qo‘llash orqali tebranishlarni kamaytirish mumkin. Shuningdek, ish rejimlarini to‘g‘ri tanlash ham muhim ahamiyatga ega.

Xulosa qilib aytganda, butun tanali tebranishlarni kamaytirish operator salomatligi, mehnat samaradorligi va iqtisodiy ko‘rsatkichlarni yaxshilash uchun muhim bo‘lib, olingan natijalar inson–mashina tizimini takomillashtirish uchun ilmiy-amaliy asos bo‘lib xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Rao S.S. *Mechanical Vibrations*. – Cham: Springer, 2017. DOI: 10.1007/978-3-319-56847-0
2. Griffin M.J. *Handbook of Human Vibration*. – London: Academic Press, 1990.
3. Bovenzi M. Health risks from occupational exposures to mechanical vibration // *Industrial Health*. – 2015.URL: https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC4562899/
4. Scarlett A.J. Whole-body vibration: evaluation of emission and exposure levels arising from agricultural tractors // *Biosystems Engineering*.
URL: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/23311916.2018.1507266

5. Kumar A., Singh R. Finite element analysis for vibration reduction in agricultural machinery // *International Journal of Mechanical Sciences*, 2005. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0169814117300628
6. Zhang X. et al. Modal analysis of agricultural machinery // URL: https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC10266682/
7. Cutini M., Costa C. Whole-body vibration in agriculture: risks and protective strategies // *Agriculture*. URL: https://www.mdpi.com/2077-0472/7/10/84
8. Zhang Y. et al. Finite element analysis of vibration systems // *Processes*. URL: https://www.mdpi.com/2227-9717/13/3/610
9. World Health Organization. Environmental Health Criteria: Vibration. – Geneva, 2004.
10. International Organization for Standardization. ISO 2631-1: Mechanical vibration and shock — Evaluation of human exposure to whole-body vibration, 1997.
11. Lines J.A., Murphy K.J. The influence of seat characteristics on operator vibration exposure // *Journal of Agricultural Engineering Research*.
12. Hostens I., Ramon H. Descriptive analysis of combine harvester vibrations and seat transmissibility // *ournal of Sound and Vibration*.
13. Macdonald W.A. *Human Performance and Whole-Body Vibration*. – London: Taylor & Francis, 2002.
14. Lundberg U., et al. Effects of mechanical vibration on muscle activity and psychomotor performance // *Ergonomics*, 1989.
15. Jorgensen K., et al. Heart rate variability as a measure of stress under mechanical vibration // *Occupational and Environmental Medicine*, 1991.
16. Merat N., Jamson S. Cognitive performance under whole-body vibration exposure // *Transportation Research Part F*, 2008.
17. Lines J.A., Murphy K.J. Optimisation of seat parameters to reduce WBV exposure // *Journal of Agricultural Engineering Research*, 1996.
18. Hostens I., et al. Vibration isolation of agricultural seat suspensions // *Journal of Sound and Vibration*, 2007.
19. Choi S., Han C. Active seat suspension systems for human comfort under vibration // *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2010.
20. Whole body vibration therapy and cognitive functions: a systematic review // *AIMS Neuroscience*. – 2023. DOI: 10.3934/Neuroscience.2023010

ЗАДАЧА О ФЛАТТЕРЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОСТАНОВКЕ УЧИТЫВАЮЩИЕ ФИЗИЧЕСКИЕ И АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ

М.М.Мансуров
Кокандский государственный университет
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610615

Рассмотрим задачу флаттера вязкоупругого стержня с учетом физической нелинейностью

$$\sigma = (1 - R^*)(m_1\varepsilon + m_2\varepsilon^3), \quad \varepsilon = u_x, \; u = -zw_x \qquad (1)$$

где

$$R^* f(t) = \int_0^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

или

$$\sigma = (1 - R^*)(- m_1 z w_{xx} - m_2 z^3 w_{xx}^3) \qquad (2)$$

где m_1 и m_2 упругие постоянные, определяющие в процессе испытаний материала на растяжение или кручение, причем $m_2<0$ для материала мягких, а $m_2>0$ жестких характеристик, $R(t)$ – ядро наследственности имеющее слабо-сингулярные особенности типа Абеля.

Следует учитывать также влияние аэродинамических нелинейностей. Учет этих нелинейностей важен при больших числах М. Для определения нормального давления на поверхности принимается так называемая «поршневая» теория.

По одномерной теории газа давление газа на поршень

$$p = p_\infty \left(1 + \frac{\chi - 1}{2} \frac{U}{c_\infty}\right)^{\frac{2\chi}{\chi - 1}} \qquad (3)$$

где p_∞ и c_∞ – давление и скорость звука невозмущенном патоке, χ – отношение теплоемкости газа при неизменном давлении к теплоемкости при постоянном объеме (коэффициент политропа).

Рассмотрим линеаризированное течение газа вдоль поверхности, по которой распространяются упругие волны. В этом случае

$$U = V \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \qquad (4)$$

где w– перемещение системы по нормали к первоначальной ее поверхности.

Применим для уравнения (3) формулу бинома Ньютона и во втором приближении получим:

$$q = k\left[V \frac{\partial w}{\partial x} + \chi_1 V^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial t}\right] \qquad (5)$$

где $q = p - p_\infty$, $k = \dfrac{\chi p_\infty}{c_\infty}$, $\chi_1 = \dfrac{\chi + 1}{4c_\infty}$.

Рассмотрим задачу о флаттере в нелинейной вязкоупругой постановке учитывающие физические и аэродинамические нелинейности. С этой целью построим математическую модель для исследования вязкоупругого стержня в потоке газа с учетом этих нелинейностей.

В данном случае, принимая гипотезу плоских сечений для изгибающего момента используем следующую формулу:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} b(x)\sigma_x z dz \qquad (6)$$

(2) поставим в (7) и получаем:

$$M_x = -(1 - R^*)\left[m_1 J_2 w_{xx} + m_2 J_4 w_{xx}^3\right] \qquad (7)$$

где

$$J_i = \int_F S^i dF,\ i = 2,4$$

и равные для балок шириной $b(x)$ и высотой $h(x)$

$$J_2 = \frac{b(x)h^3(x)}{12}, \quad J_4 = \frac{b(x)h^5(x)}{80}.$$

Подставляя (6) и (7) в уравнение равновесия, т.е.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = m(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x,t) \qquad (8)$$

имеем

$$-(1 - R^*)\frac{\partial}{\partial x^2}\left[m_1 J_2 w_{xx} + m_2 J_4 w_{xx}^3\right] = m(x)w_{tt} + k\left[Vw_x + \chi_1 V^2 w_x^2 + zw_t\right]$$

Переходим к безразмерным координатам. Для этого введем следующие обозначения:

$$w = h_0\overline{w},\ x = a\bar{x},\ t = t_1\bar{t},\ m(x) = m_0\overline{F(x)},\ h(x) = h_0\overline{h(x)},\ b(x) = b_0\overline{b(x)},$$
$$J_2 = J_2^0\overline{J_2},\ J_4 = J_4^0\overline{J_4}$$

где

$$\bar{J}_2 = \frac{\overline{b(x)}\overline{h^3(x)}}{12}, \quad \bar{J}_4 = \frac{\overline{b(x)}\overline{h^5(x)}}{80}$$

и опуская штрихи имеем

$$-m_1 J_2^0 \frac{h_0}{a^4}(1 - R^*)\frac{\partial}{\partial x^2}\left[J_2(x)w_{xx} + \frac{m_2 J_4^0}{m_1 J_2^0 h_0^2} J_4(x)\left(\frac{h_0}{a}\right)^4 w_{xx}^3\right] = m_0 F(x)\frac{h_0}{t_1^2}w_{tt} +$$

$$+ kV\frac{h_0}{a}w_x + k\chi_1 V^2\frac{h_0^2}{a^2}w_x^2 + kz\frac{h_0}{t_1}w_t = 0$$

Введя обозначения, получим дифференциальное уравнение в частных производных

$$(1-R^*)\frac{\partial}{\partial x^2}\left[J_2(x)w_{xx}+Q_1J_4(x)w_{xx}^3\right]+F(x)w_{tt}+P_{кр}w_x+Q_2P_{кр}^2w_x^2+\gamma w_t=0 \qquad (9)$$

где

$$J_2^0=\frac{b_0h_0^3}{12},\quad J_4^0=\frac{b_0h_0^5}{80},\quad J_2(x)=b(x)h^3(x),\quad J_4(x)=b(x)h^5(x),$$

$$Q_1=\frac{m_2J_4^{(0)}}{m_1J_2^{(0)}h_0^2}\left(\frac{h_0}{a}\right)^4,\quad Q_2=\frac{m_1b_0(\chi+1)}{48kc_\infty}\left(\frac{h_0}{a}\right)^4,$$

$$P_{кр}=\frac{kVa^3}{m_1J_2^{(0)}},\quad t_1=\sqrt{\frac{m_0a^4}{m_1J_2^{(0)}}},\quad \gamma=\frac{kza^4}{m_1J_2^{(0)}t_1},\ F(x)=b(x)h(x)$$

h_0 – величина высоты стержня в концах, b_0 – величина ширины стержня в концах, m_0 – величина массы соответствующий единичному переменного сечения стержня.

Нелинейные дифференциальное уравнение в частных производных (9), вместе с граничными:

w=0, w_x=0 при x=0

w_{xx}=0, w_{xxx}=0 при x=1

и начальными:

$$w\big|_{t=0}=f_0(x),\quad w_t\big|_{t=0}=f_1(x)$$

условиями представляют математическую модель задачи о флаттере вязкоупругого стержня с учетом физической и аэродинамической нелинейности. Требуется найти критические скорости $P_{кр}$ приводящий к нарастающему амплитуде колебаний.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бадалов Ф. Б. Методы решения интегральных и интегро – дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент, «Мехнат», 1987. 269с.

2. Abdikarimov R.A., Mansurov M.M. Flutter of a viscoelastic rigidly restrained bar with account for nonlinearities. International Conference on Actual Problems of Applied Mechanics - APAM-2021 AIP Conf. Proc. 2637, 030003 1–030003-6; https://doi.org/10.1063/5.0121701 Published by AIP Publishing. 978-0-7354-4229-0/$30.00

3. Mansurov M., Abdikarimov R., Mirsaidov M. Self-oscillatory process of a viscoelastic elongated plate; 2022; Construction of Unique Buildings and Structures; 96 Article No 9600. doi: 10.4123/CUBS.96.0

4. Mansurov M.M., Abdikarimov R.A., Kobilov M.Kh. Mathematical model of the problem of self oscillations (flutter) of a viscoelastic rod taking into account physical and aerodynamic nonlinearities. Scientific and technical journal FerPI. Vol.28, Special issue No.7, pp. 9-15. 2024

5. Mansurov M.M. Автоколебания линейного консольного стержена. Journal of science-innovative research in Uzbekistan, volume 03, issue 06, 2025. june

BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISHDA SONLI USULLARNING TAHLILI VA HISOBLASH SAMARADORLIGI

Qambarov Muxriddin Zuxridinovich[1], Abduraxmonova Mohichehra Farohiddin qizi[2]
[1]Qo‘qon davlat universiteti Matematika kafedrasi dotsenti, PhD,
[2]Qo‘qon davlat universiteti 4-bosqich talabasi
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610641

Annotatsiya: *Mazkur maqolada birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni yechishda qo‘llaniladigan sonli usullar ilmiy-nazariy jihatdan tadqiq qilindi. Tadqiqot davomida Eyler usuli, takomillashtirilgan Eyler usuli va to‘rtinchi tartibli Runge–Kutta usulining hisoblash aniqligi, yaqinlashish tezligi hamda global xatolik ko‘rsatkichlari qiyosiy tahlil qilindi. Hisoblash tajribalari MATLAB dasturi yordamida amalga oshirildi va natijalar grafik hamda jadval ko‘rinishida baholandi. Tadqiqot natijalari Runge–Kutta usuli yuqori aniqlik va barqarorlikka ega ekanligini ko‘rsatdi.*

Kalit so‘zlar: *differensial tenglama, sonli usullar, Eyler usuli, Runge–Kutta usuli, MATLAB, global xatolik, approksimatsiya, matematik modellashtirish.*

Abstract: *This article presents a scientific and theoretical study of numerical methods used for solving first-order ordinary differential equations. During the research, the computational accuracy, convergence rate, and global error indicators of the Euler method, the Improved Euler method, and the fourth-order Runge–Kutta method were comparatively analyzed. Computational experiments were carried out using MATLAB software, and the obtained results were evaluated in graphical and tabular forms. The research findings demonstrated that the Runge–Kutta method possesses high accuracy and numerical stability.*

Keywords: *differential equation, numerical methods, Euler method, Runge–Kutta method, MATLAB, global error, approximation, mathematical modeling.*

Differensial tenglamalar zamonaviy matematika va amaliy fanlarning asosiy tadqiqot obyektlaridan biri hisoblanadi. Ular fizik jarayonlar, biologik tizimlar, iqtisodiy modellar va texnologik jarayonlarni tavsiflashda keng qo‘llaniladi. Ko‘plab murakkab differensial tenglamalar uchun analitik yechimni topish imkonsiz yoki juda qiyin bo‘lgani sababli sonli usullardan foydalanish zarurati yuzaga keladi.

Birinchi tartibli differensial tenglamalarni yechishda Eyler usuli, takomillashtirilgan Eyler usuli va Runge–Kutta usuli eng ko‘p qo‘llaniladigan algoritmlar qatoriga kiradi [3]. Ushbu usullar orasidagi asosiy farq hisoblash aniqligi va xatolik darajasida namoyon bo‘ladi.

Mazkur tadqiqotning maqsadi sonli usullarni nazariy va amaliy jihatdan tahlil qilish, ularning hisoblash samaradorligini aniqlash hamda MATLAB muhiti yordamida eksperimental natijalarni olishdan iborat.

Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama quyidagi umumiy ko‘rinishda ifodalanadi:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

bu yerda:

- $f(x,y)$— uzluksiz funksiya;

- (x_0, y_0) — boshlang‘ich shart.

Sonli usullarning asosiy maqsadi berilgan oraliqda funksiyaning taxminiy qiymatlarini hisoblashdan iborat. Differensial tenglamalarni sonli yechishda quyidagi xatolik turlari mavjud:

- lokal xatolik;
- global xatolik;
- truncation xatolik;
- hisoblashdagi yumaloqlash xatoliklari.

Tadqiqotlar shuni ko‘rsatadiki, qadam uzunligi kamayishi bilan xatolik kamayadi, ammo hisoblash vaqti ortadi [4].

Eyler usulining nazariy tahlili. Eyler usuli differensial tenglamalarni yechishning eng sodda sonli usullaridan biridir.

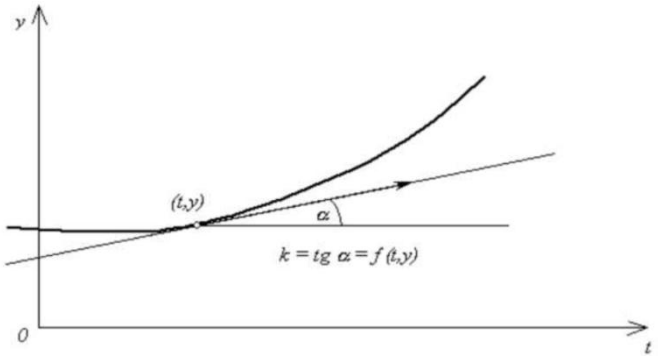
Usul formulasi:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

bu yerda:

- h— qadam uzunligi;
- $x_{n+1} = x_n + h$

Eyler usuli yechim egri chizig‘ini urinma chiziqlar yordamida approksimatsiya qiladi.



1-rasm. Eyler usulining geometrik interpretatsiyasi

Eyler usulini o‘ziga hos afzalliklari va kamchiliklari mavjud.

Afzalliklari:

- algoritm sodda;
- dasturlash oson;
- hisoblash tezligi yuqori.

Kamchiliklari:

- global xatolik katta;
- aniqlik past;
- qadam uzunligiga sezgir.

Eyler usulining global xatoligi *O(h)* ko‘rinishida baholanadi [5].

Takomillashtirilgan Eyler usuli. Takomillashtirilgan Eyler usuli oddiy Eyler usulining aniqligini oshirish maqsadida ishlab chiqilgan.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

Mazkur usulda ikki nuqtadagi qiyaliklarning o‘rtacha qiymati hisoblanadi.

Tahlillar natijasiga ko‘ra, takomillashtirilgan Eyler usuli oddiy Eyler usuliga nisbatan ancha yuqori aniqlik beradi. Ushbu usulning global xatoligi $O(h^2)$ bo‘lib, bu hisoblash natijalarining aniqroq bo‘lishini ta’minlaydi [6].

To‘rtinchi tartibli Runge–Kutta usuli. Runge–Kutta usuli sonli hisoblashlarda eng samarali usullardan biri hisoblanadi.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

bu yerda:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

Runge–Kutta usulining global xatoligi $O(h^4)$ bo‘lib, bu uning yuqori aniqlik darajasiga ega ekanligini ko‘rsatadi [7].

Teorema. Agar $f(x, y)$ funksiya uzluksiz bo‘lsa va Lipschitz shartini qanoatlantirsa, unda Koshi masalasi yagona yechimga ega bo‘ladi.

Isbot. Pikar–Lindelyof teoremasiga ko‘ra:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L[y_1 - y_2]$$

sharti bajarilganda iteratsion jarayon yaqinlashuvchi bo‘ladi va yagona yechim mavjudligi ta’minlanadi [8].

Teorema. Eyler usuli h→0 da aniq yechimga yaqinlashadi.

Isbot. Taylor qatoridan foydalanamiz:

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x) + O(h^2)$$

Eyler formulasi

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

bo‘lgani sababli lokal xatolik $O(h^2)$, global xatolik esa *O(h)* tartibli bo‘ladi.

Tahlil uchun quyidagi differensial tenglama qaraldi:

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \qquad y(0) = 1$$

Analitik yechim:

$y = 2e^x - x$-1

Qadam uzunligi:

h=0.1

Sonli usullar natijalari jadval asosida tahlil qilganimizda, natijalar shuni ko‘rsatadiki, Runge–Kutta usuli analitik yechimga juda yaqin qiymatlar beradi.

1-jadval. Sonli usullar natijalari

X	Aniq yechim	Eyler	RK4
0.0	1.000	1.000	1.000
0.1	1.210	1.100	1.210
0.2	1.443	1.220	1.443
0.3	1.700	1.362	1.700

Eyler usuli uchun MATLAB kodi

```
clc;
clear;

f = @(x,y) x+y;
h = 0.1;
x = 0:h:1;
y = zeros(size(x));
y(1)=1;

for i=1:length(x)-1
y(i+1)=y(i)+h*f(x(i),y(i));
end

plot(x,y,'o-')
grid on
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Eyler usuli')
```

Runge–Kutta Usuli uchun MATLAB kodi

```
clc;
clear;

f=@(x,y) x+y;
h=0.1;
x=0:h:1;
y=zeros(size(x));
y(1)=1;

for i=1:length(x)-1
k1=h*f(x(i),y(i));
k2=h*f(x(i)+h/2,y(i)+k1/2);
k3=h*f(x(i)+h/2,y(i)+k2/2);
k4=h*f(x(i)+h,y(i)+k3);

y(i+1)=y(i)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
```

```
end

plot(x,y,'*-')
grid on
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Runge-Kutta usuli')
```

Olingan natijalar muxokamasi sonli usullar aniqligi qadam uzunligi va algoritm tartibiga bog‘liq ekanligini ko‘rsatdi. Eyler usuli oddiy hisoblashlarda samarali bo‘lsa-da, yuqori aniqlik talab qilinadigan masalalarda sezilarli xatolik beradi. Takomillashtirilgan Eyler usuli esa aniqlikni oshiradi.

Runge–Kutta usuli quyidagi ustunliklarga ega:

- yuqori aniqlik;
- global xatolikning kichikligi;
- murakkab matematik modellar uchun mosligi.

Shu sababli Runge–Kutta usuli ilmiy hisoblashlarda eng samarali algoritmlardan biri hisoblanadi [9].

Mazkur maqolada birinchi tartibli differensial tenglamalarni yechishning asosiy sonli usullari ilmiy jihatdan tahlil qilindi.

Tadqiqot natijalari quyidagi xulosalarni ko‘rsatdi:

1. Eyler usuli sodda va tezkor hisoblash imkonini beradi.
2. Takomillashtirilgan Eyler usuli aniqlikni oshiradi.
3. Runge–Kutta usuli yuqori aniqlik va barqarorlikka ega.
4. MATLAB muhiti sonli usullarni modellashtirishda samarali vosita hisoblanadi.

Kelgusida adaptiv qadamli algoritmlar va optimallashtirilgan hisoblash usullarini tadqiq qilish dolzarb ilmiy yo‘nalishlardan biri bo‘lib qoladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Boyce W.E., DiPrima R.C. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. – New York: Wiley, 2017. – 768 p.
2. Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis. – Boston: Cengage Learning, 2015. – 888 p.
3. Butcher J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. – Chichester: Wiley, 2016. – 536 p.
4. Atkinson K. An Introduction to Numerical Analysis. – New York: Wiley, 1989. – 693 p.
5. Lambert J.D. Numerical Methods for Ordinary Differential Systems. – Chichester: Wiley, 1991. – 293 p.
6. Islomov T., Axmedov A. Differensial tenglamalarni yechishning sonli usullari. – Toshkent: O‘qituvchi, 2020. – 240 b.
7. Samarskii A.A. The Theory of Difference Schemes. – New York: Marcel Dekker, 2001. – 786 p.
8. Mathews J.H., Fink K.D. Numerical Methods Using MATLAB. – New Jersey: Prentice Hall, 2004. – 704 p.
9. Süli E., Mayers D. An Introduction to Numerical Analysis. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – 444 p.
10. Quarteroni A., Saleri F. Scientific Computing with MATLAB and Octave. – Berlin: Springer, 2010. – 337 p.

KELTIRISH FORMULALARINI BIRLIK AYLANA ASOSIDA VIZUAL KELTIRIB CHIQARISH

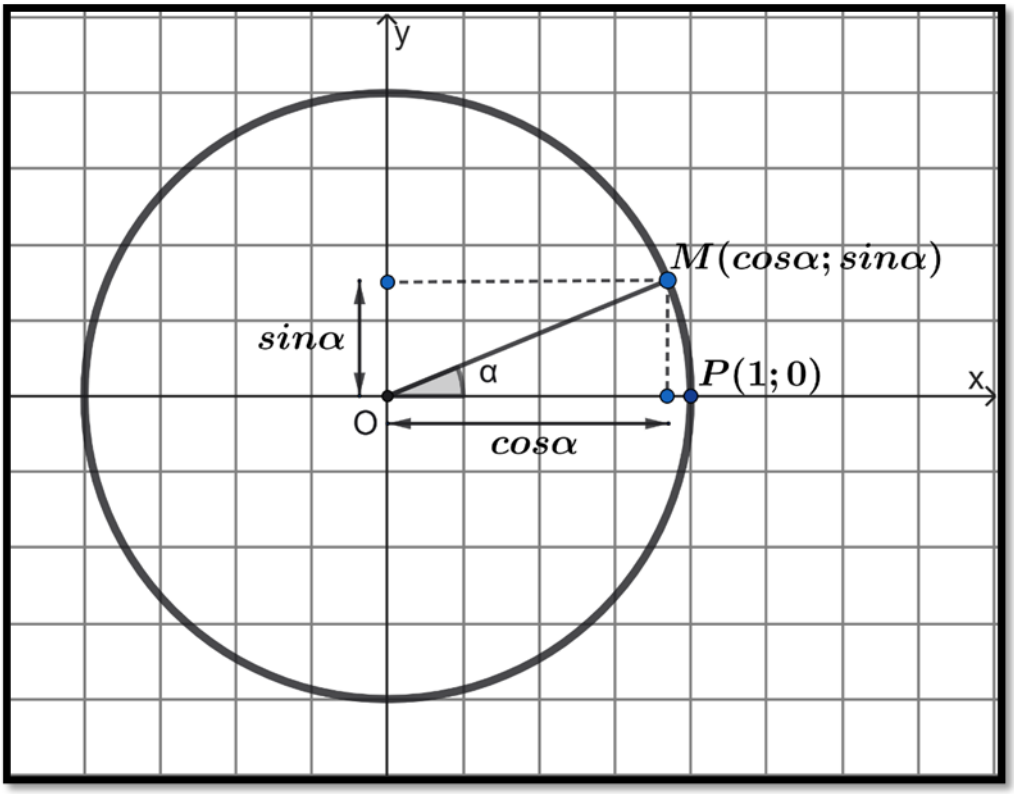
Abdiyeva Shoira Shukurovna[1], Odilova Shoxista Samatqul qizi[2]
[1]Cyber universiteti o'qituvchisi, [2]Navoiy davlat universiteti tayanch doktoranti
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610791

Annotatsiya. *Ushbu maqolada 9-sinf algebra va 10-sinf algebra va analiz asoslari kursi trigonometriya bo'limida keltirish formulalarini o'qitishning vizual yondashuvi yoritiladi. Odatda masalalarni yechishda keltirish formulalarini yodlash talab etiladi. Ushbu maqolada formulalarni birlik aylana yordamida grafik tasvirlar orqali tahlil qilish tavsiya etiladi. Koordinatalar tekisligida birlik aylanadagi nuqtalarning koordinatalari orqali sinus va kosinusning geometrik ma'nosi tushuntiriladi va shu orqali keltirish formulalari vizual tarzda keltirib chiqariladi. Maqolada 9-10-sinflarda foydalanish uchun vizual masalalar ketma-ketligi berilgan. Bu trigonometrik formulalarni geometriya bilan bog'lash va o'quvchilar vizual tafakkurini rivojlantirishga xizmat qiladi.*

Kalit so'zlar: *birlik aylana, keltirish formulalari, nuqtaning koordinatasi, vizual tafakkur.*

Kirish. 9-sinf algebra darsligida [1] keltirish formulalari tushunchasi, keltirish formulalari, xususan burchak 360^o dan katta bo'lganda burchak sinusi, kosinusi, tangensi va katangensini hisoblash, $\sin(90^o-\alpha)=\cos\alpha$, $\cos(90^o-\alpha)=\sin\alpha$, $\sin(180^o+\alpha)=-\sin\alpha$, $\cos(180^o+\alpha)=-\cos\alpha$ kabi keltirish formulalarini misollar yechishda qo'llashga o'rgatiladi. 10-sinf algebra va analiz asoslari darsligida [3] keltirish formulalari jadval ko'rinishida keltirilgan. Biroq bu formulalarni qo'llash ularni yodlashni talab qiladi. Oliy ta'lim muassasalariga kirish test sinovlarida, matematika fanidan milliy sertifikat imtihonlarida ba'zan keltirish formulalari o'quvchilar yodidan ko'tariladi. Quyida formulalarni yodlash bilan emas, balki birlik aylana tasviri yordamida chizish orqali keltirib chiqarish mumkinligi va vizual masalalar berish orqali formulalarni keltirib chiqarish ko'rib chiqiladi.

Bizga ma'lumki, koordinatalar tekisligida birlik aylanada boshlang'ich $P(1;0)$ nuqta olinadi. Bu nuqta koordinatalar boshiga nisbatan biror α burchakka burilsa, birlik aylanada yangi $M(x,y)$ nuqta hosil bo'ladi. Bu nuqtaning koordinatalari ya'ni abssissasining qiymati α burchak kosinusini, ordinatasining qiymati α burchak sinusining qiymatini ifodalaydi ya'ni $M(\cos\alpha;\sin\alpha)$ (1-rasm).



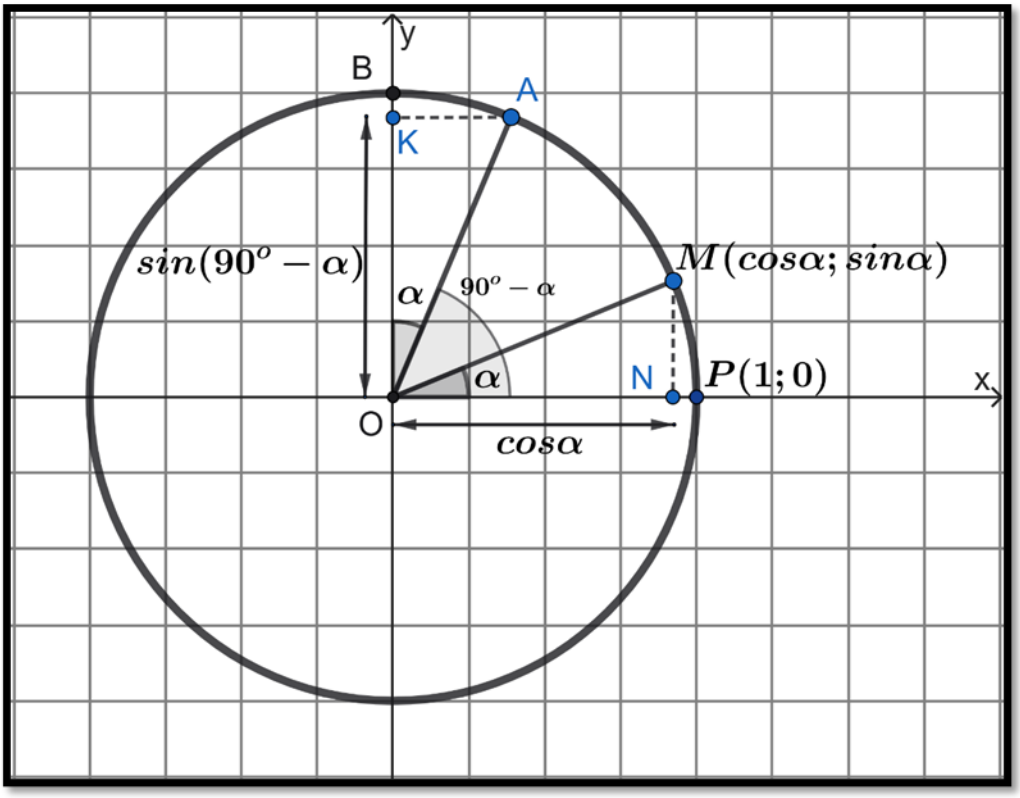
1-rasm

Endi $\sin(90^o - \alpha) = \cos\alpha$ keltirish formulasini birlik aylana yordamida vizual tarzda keltirib chiqarish masalasi quyidagicha bajariladi:

1) $90^o - \alpha$ burchakni hosil qilish 90^o li burchakdan 1-rasmda hosil qilib olingan α burchakni ayirish (olib tashlash) orqali yasaladi ya’ni $\angle POA = 90^o - \angle BOA = 90^o - \alpha$. Natijada $A(\cos(90^o - \alpha); \sin(90^o - \alpha))$ nuqta hosil qilinadi (2-rasm).

2) Bu nuqta ordinatasi $\sin(90^o - \alpha)$ ning qiymatini topish uchun 2-rasmdagi *MON* va *AOK* to‘g‘ri burchakli uchburchaklarning $\sin(90^o - \alpha)$ va $\cos\alpha$ katetlari taqqoslanadi.

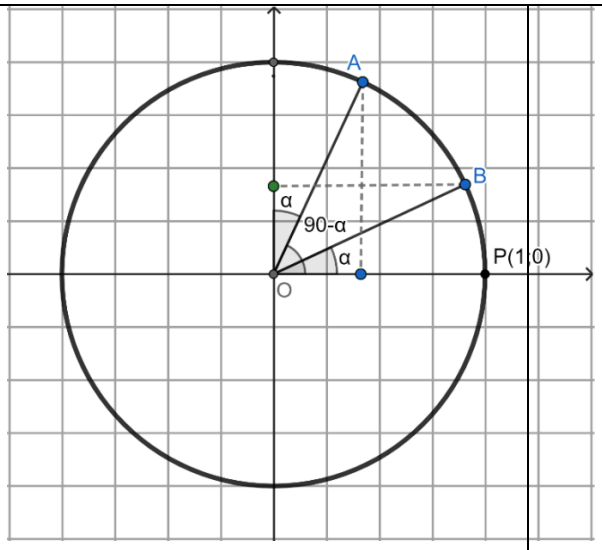
3) 2-rasmdagi *MON* va *AOK* to‘g‘ri burchakli uchburchaklarning tengligini ko‘rsatiladi. Bu uchburchaklarning α o‘tkir burchaklari va gipotenuzalari (aylana radiusi) teng ya’ni to‘g‘ri burchakli uchburchaklar tengligining GB (gipotenuza- burchak) alomatiga [2] ko‘ra, *MON* va *AOK* to‘g‘ri burchakli uchburchaklar teng. Bundan ularning barcha tomonlari ham teng ekanligi kelib chiqadi. U holda $\sin(90^o - \alpha) = \cos\alpha$ (2-rasm).



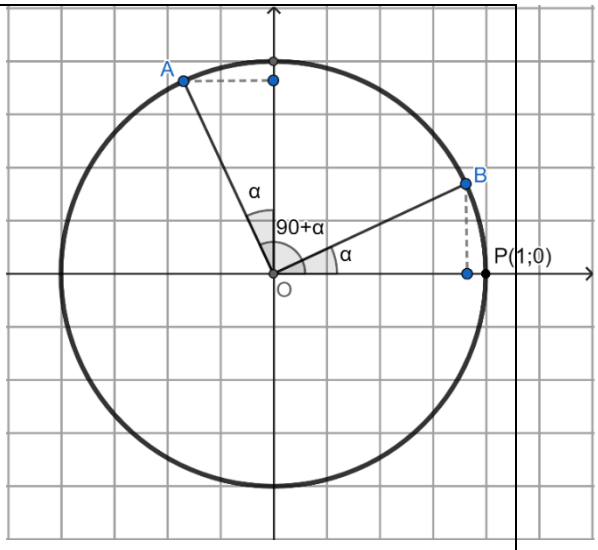
2-rasm

Keltirish formulalarini birlik aylanalar yordamida 9-sinf o‘quvchilariga $\sin 200^o = \sin(180^o + 20^o)$ kabi xususiy qiymatlar ko‘rinishida, 10-sinf o‘quvchilariga esa umumlashgan holda quyidagi masalalar ketma-ketligi shaklida berish tavsiya etiladi.

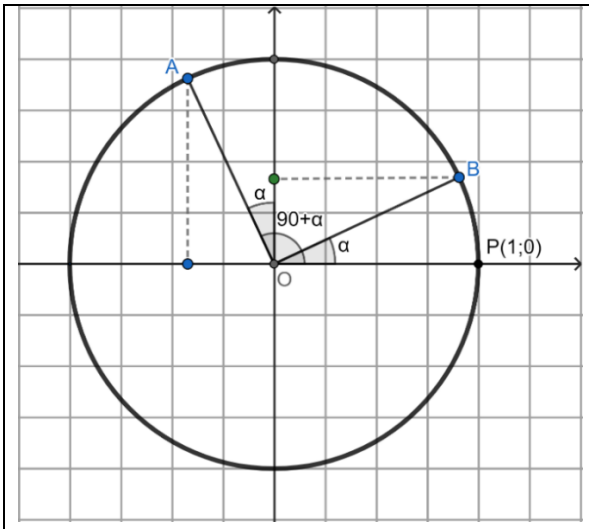
Masala. Rasm asosida $sin\alpha$ va $cos\alpha$ dan foydalanib, sinus va kosinusning tegishli burchaklardagi qiymatlarini toping.



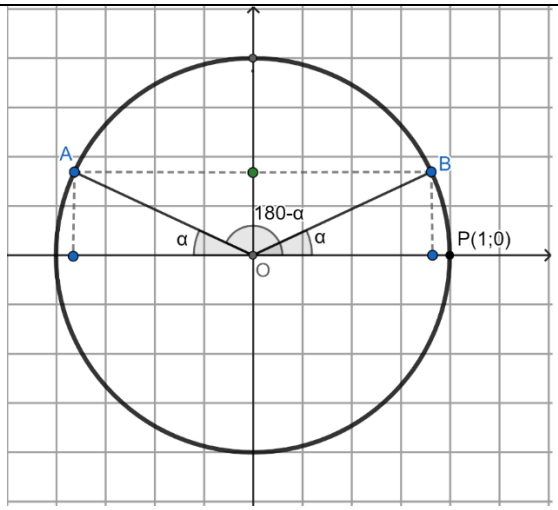
$a)\ \cos(90^o - \alpha) =$



$b)\ \sin(90^o + \alpha) =$

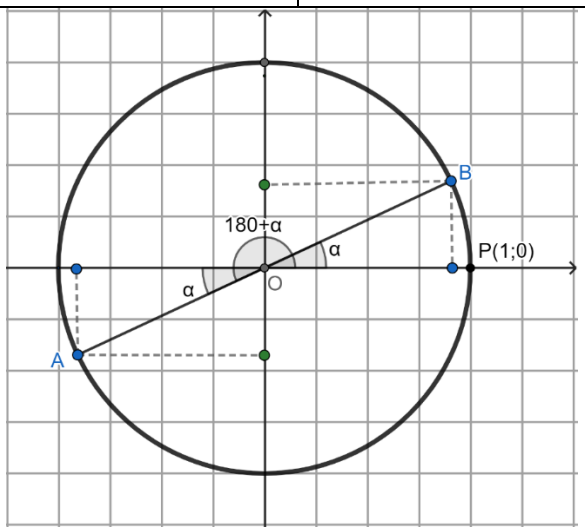


$c)\ \cos(90^o + \alpha) =$



$d)\ \sin(180^o - \alpha) =$

$e)\ \cos(180^o - \alpha) =$



$f)\ \sin(180^o + \alpha) =$

$h)\ \cos(180^o + \alpha) =$

Yuqoridagi kabi birlik aylanada sinus, kosinus, tangens va kotangensning $270^o - \alpha$, $270^o + \alpha$, $360^o - \alpha$ va $360^o + \alpha$ gradusdagi qiymatlari uchun keltirish formulalarini topish mumkin.

Yuqorida keltirish formulalarini birlik aylana yordamida vizual asosda keltirib chiqarish metodikasi bayon qilindi. Taklif etilgan yondashuv formulalarni mexanik yodlash zaruratini kamaytirib, ularning geometrik mazmunini chuqur anglashga imkon beradi. Birlik aylana ustidagi nuqtalarning koordinatalarini tahlil qilish orqali sinus va kosinusning turli burchaklardagi qiymatlari oson aniqlanadi. Bu usul o‘quvchilarning vizual tafakkuri va mantiqiy fikrlashini rivojlantiradi hamda trigonometrik formulalarni ongli ravishda qo‘llash ko‘nikmalarini shakllantiradi.

Keltirish formulalarini geometrik tahlil qilinar ekan $180^o - \alpha$, $180^o + \alpha$, $360^o - \alpha$ kabi burchaklarni oliy matematikada Dekart koordinatalar sistemasida berilgan nuqtani qutb koordinatalar sistemasiga o‘tkazishda qutb burchagini topish masalasini ham vizual tushunish imkonini beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Alimov Sh.A., Xolmuhamedov O.R., Mirzaahmedov M.A. Algebra: Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 9-sinfi uchun darslik. Toshkent: “O‘qituvchi” NMIU, 2019. – 240 b.
2. A’zamov A. va boshqalar. Geometriya: Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 7-sinfi uchun darslik. Toshkent: “Yangiyo‘l Poligraph Service”, 2017. – 160 b.
3. Zaitov A. va boshqalar. Algebra va analiz asoslari: Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 10-sinfi uchun darslik. Toshkent: Respublika ta’lim markazi, 2022. – 192 b.

“ANALITIK GEOMETRIYA” UMUMKASBIY FANINI MOBIL TA’LIMGA ASOSLANGAN O‘QITISH TIZIMI TAMOYILLARI

Akbarova Gulhayo Ashirali[1], Muydinjanov Davlatjon Rafikjon o‘g‘li[2]
[1]Qo‘qon DU magistranti, akbarovagulhayo444@gmail.com,
[2]Qo‘qon DU PhD dotsent
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610804

Annotatsiya. *Ushbu maqolada analitik geometriya fanini mobil ta’lim texnologiyalariga asoslangan holda o‘qitishning pedagogik tamoyillari yoritilgan. Zamonaviy raqamli texnologiyalar yordamida talabalar bilimini mustaqil ravishda shakllantirish, mavzularni interaktiv usullar orqali o‘zlashtirish hamda ta’lim samaradorligini oshirish masalalari tahlil qilingan. Maqolada mobil ta’limning afzalliklari, uning analitik geometriya fanini o‘qitish jarayonidagi o‘rni va talabalarning mantiqiy hamda fazoviy tafakkurini rivojlantirishdagi ahamiyati ochib berilganTadqiqot natijalariga ko‘ra, mobil ta’lim asosida tashkil etilgan darslar talabalarning fan bo‘yicha qiziqishini oshirishi, mustaqil ishlash ko‘nikmalarini rivojlantirishi hamda bilimlarni puxta o‘zlashtirishga xizmat qilishi aniqlangan.*

Kalit so‘zlar: *analitik geometriya, mobil o‘qitish tizimi, mustaqil ta’lim, ta’lim samaradorligi, talabalar faolligi, raqamli texnologiyalar, interaktiv ta’lim, masofaviy ta’lim, mobil ilovalar, innovatsion pedagogik yondashuvlar.*

Аннотация.*В данной статье рассматриваются педагогические принципы преподавания аналитической геометрии на основе мобильных образовательных технологий. Анализируются вопросы самостоятельного формирования знаний учащихся, освоения тем интерактивными методами и повышения эффективности обучения с использованием современных цифровых технологий. В статье раскрываются преимущества мобильного образования, его роль в процессе обучения аналитической геометрии и его важность в развитии логического и пространственного мышления учащихся. По результатам исследования установлено, что занятия, организованные на основе мобильного образования, повышают интерес учащихся к предмету, развивают навыки самостоятельной работы и способствуют глубокому усвоению знаний.*

Ключевые слова*: аналитическая геометрия, мобильная система обучения, самостоятельное обучение, эффективность обучения, активность учащихся, цифровые технологии, интерактивное обучение, дистанционное обучение, мобильные приложения, инновационные педагогические подходы.*

Annotation. *This article discusses the pedagogical principles of teaching analytical geometry based on mobile educational technologies. The issues of independent formation of students' knowledge, mastering topics through interactive methods, and increasing educational efficiency using modern digital technologies are analyzed. The article reveals the advantages of mobile education, its role in the process of teaching analytical geometry, and its importance in developing students' logical and spatial thinking. According to the results of the study, it was found that lessons organized on the basis of mobile education increase students' interest in the subject, develop independent work skills, and serve for thorough mastery of knowledge.*

Keywords: *analytical geometry, mobile learning system, independent learning, educational efficiency, student activity, digital technologies, interactive learning, distance learning, mobile applications, innovative pedagogical approaches.*

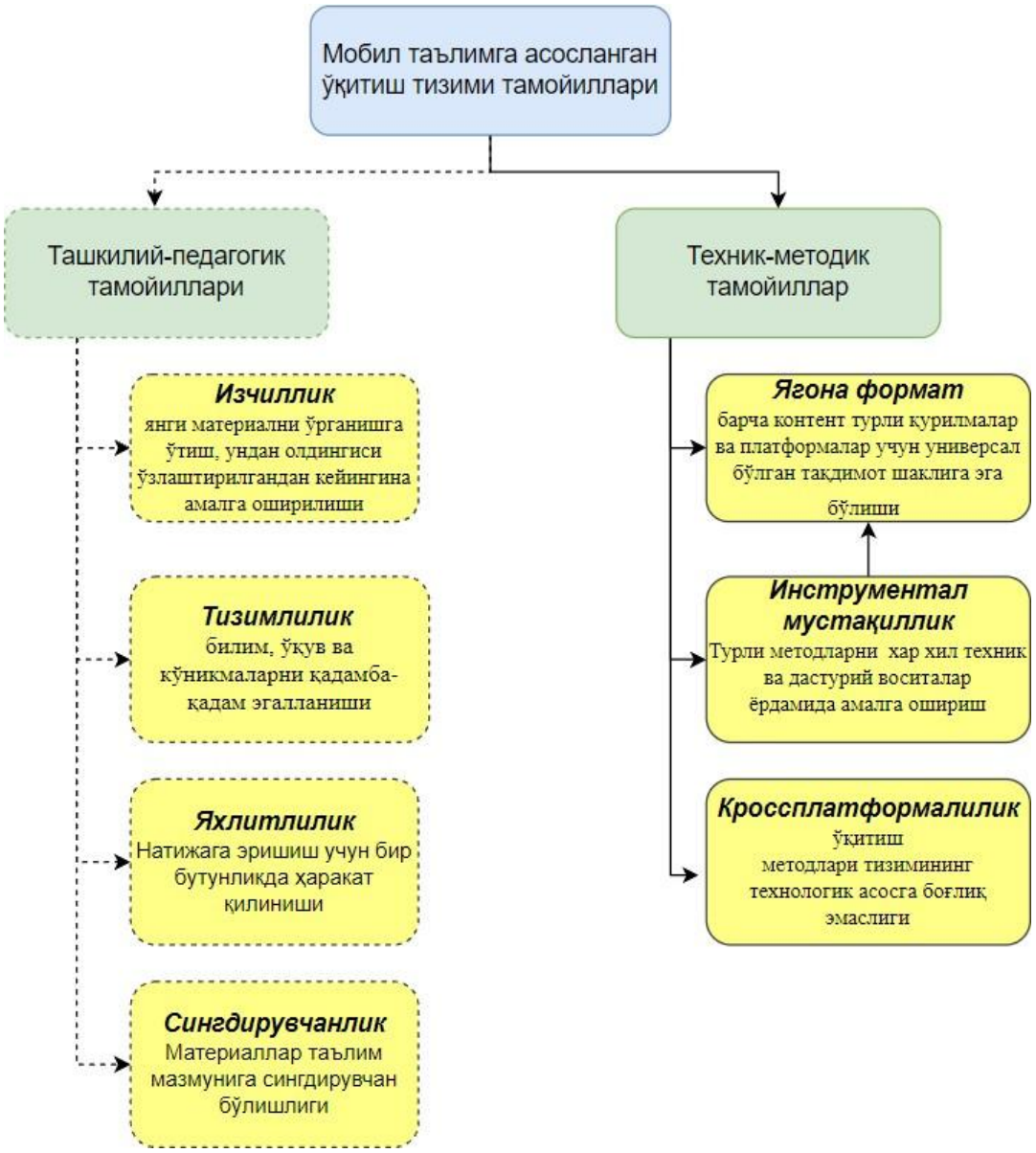
Kirish.O‘zbekiston Respublikasida ta’lim tizimini modernizatsiya qilish va uni xalqaro standartlar darajasiga olib chiqish davlat siyosatining ustuvor yo‘nalishlaridan biri sifatida e’tirof etilmoqda. Jumladan, O‘zbekiston Respublikasining “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonunida ta’limning uzluksizligi va izchilligi, shaxsga yo‘naltirilgan yondashuvni ta’minlash, ta’lim jarayoniga innovatsion pedagogik va axborot texnologiyalarini keng joriy etish hamda ta’lim oluvchilarning mustaqil ta’lim olish kompetensiyalarini rivojlantirish muhim vazifalar sifatida belgilangan [1]. Mazkur vazifalarni amalga oshirishda zamonaviy raqamli vositalar, xususan mobil o‘qitish texnologiyalari alohida ilmiy-amaliy ahamiyat kasb etadi.

Mobil o‘qitish texnologiyalari ta’lim jarayonini tashkil etishda yangi imkoniyatlarni yuzaga keltirib, o‘quvchilarga istalgan vaqt va makonda bilim olish imkonini yaratadi, ta’lim jarayonining moslashuvchanligi va samaradorligini oshiradi. Ayniqsa, matematik fanlar tarkibiga kiruvchi analitik geometriya kursini o‘qitishda ushbu texnologiyalardan foydalanish alohida o‘rin tutadi.. Chunki analitik geometriya fazoviy tasavvur, grafik ifodalar va abstrakt matematik tushunchalarni chuqur anglashni talab etadigan murakkab fanlardan biri hisoblanadi.

Tadqiqot metodlari. Mazkur tadqiqotni amalga oshirish jarayonida pedagogik kuzatish, ilmiy-metodik tahlil, taqqoslash, suhbat, so‘rovnoma hamda tajriba-sinov metodlaridan foydalanildi. Tadqiqotning nazariy qismida analitik geometriya fanini o‘qitish, mobil ta’lim texnologiyalarini joriy etish va mustaqil ta’limni tashkil etishga oid ilmiy-adabiyotlar, normativ-huquqiy hujjatlar hamda ilg‘or pedagogik tajribalar o‘rganildi va tahlil qilindi.Amaliy tadqiqot jarayonida mobil o‘qitish vositalaridan foydalanishning ta’lim samaradorligiga ta’sirini aniqlash maqsadida tajriba-sinov ishlari olib borildi. Unda talabalarning mavzularni o‘zlashtirish darajasi, mustaqil ishlash faolligi va fanga bo‘lgan qiziqishi kuzatildi hamda olingan natijalar qiyosiy tahlil asosida baholandi. Shuningdek, statistik tahlil metodlari yordamida tajriba natijalari umumlashtirilib, ularning samaradorlik ko‘rsatkichlari aniqlashtirildi.

Mavzuga oid adabiyotlarning tahlili. Mobil ta’limga asoslangan o‘qitish tizimini yaratishning oldingi bobda keltirilgan tamoyillarini quyidagi ikki guruhga ajratish mumkin (2.1.2 rasm).

Birinchi guruh tamoyillar mashg‘ulotni rejalashtirish jarayonini takomillashtirishga xizmat qilib, mazmun-mohiyati va tizimliligi jihatidan ta’sir ko‘rsatadi. Ikkinchi guruh tamoyillari o‘qitish metodlari amalga oshirishning.



texnik komponenti bilan bog‘liq, ya’ni ta’lim jarayoni ishtirokchilari o‘rtasida xizmatlar, dasturlar va axborot almashish usullarini tanlashga yo‘naltirilgan.

Mobil qurilmadan o‘ziga xos foydalanish alohida tanlanadi va talabaning shaxsiy qiziqishlariga asoslanadi.[2] . Muammoli vaziyat yaratish va so‘rov natijalarini talaba bilan muhokama qilish uchun mobil so‘rovnoma va ovoz berish yordamida darsga tayyorgarlik ko‘rish uchun o‘qituvchi Plickers xizmatidan foydalanishi mumkin [3]. Smartfon va planshetlar Internetga kirish uchun eng keng tarqalgan qurilmalar qatoriga kirishini hisobga olgan holda web kvestlarning ularda to‘g‘ri ishlashini ta’minlash zarur.Web-kvestlardan individual, mustaqil ish uchun hamda guruhli o‘qitishda foydalanish mumkin[5]. Bundan tashqari, agar interaktiv doska yoki ekranli proektor bo‘lsa, kvestlardan foydalanish o‘qituvchi va talabalarning birgalikdagi ishining bir qismi sifatida yuzaga kelishi ham mumkin.

Mashg‘ulotning bu ko‘rinishi talabalarni rag‘batlantiradi va o‘quv materialini qiziqarli tarzda mustahqamlash imkonini beradi [4].

Xulosa va takliflar. Oliy ta’lim muassasalarida “Analitik geometriya” umumkasbiy fanini mobil ta’lim texnologiyalari asosida o‘qitish ta’lim jarayonining samaradorligini oshirishda muhim omil hisoblanadi. Tadqiqot doirasida taklif etilgan o‘qitish tamoyillari, algoritmlari va bosqichlaridan foydalanish talabalarning mustaqil ta’lim faoliyatini samarali

tashkil etish, ularning bilimlarni mustaqil egallash ko‘nikmalarini rivojlantirish hamda fanga bo‘lgan qiziqishini oshirishga xizmat qiladi. Shuningdek, “Analitik geometriya” fanini o‘qitishda mobil ta’lim texnologiyalaridan samarali foydalanishni takomillashtirish uchun metodik ta’minotni kuchaytirish, interaktiv topshiriqlar, elektron resurslar va mobil platformalarni keng joriy etish ta’lim sifatini yanada oshirish imkonini beradi.

FOYDALANİLGAN ADABİYOTLAR

1. O‘zbekiston Respublikasining “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni. – Toshkent, 2020.

2. Utku Kose, Durmus Koc, Suleyman Anil Yucesoy. An Augmented Reality based Mobile Software to Support Learning Experiences in Computer Science Courses // Procedia Computer Science, Volume 25, 2013, Pages 370-374.

3. Rankapola Elias, The Use Of Podcasting Revision Lectures In Improving Learners’ Academic Performance, The Online Journal of Distance Education and e-Learning, Volume 2, Issue 4, pp. 81-91 URL: http://www.tojdel.net/journals/tojdel/articles/v02i04/v02i04-07.pdf

4. Квест для учителя –Областная газета URL: http://www.oblgazeta.ru/society/31329/ http://ekaterinburg.bezformata.ru/listnews/kvest-dlya-uchitelya/53365383/

5. Zaynutdinova, L. X. Sozdanie i primenenie elektronnых uchebnikov. – Astraxan, OOO "SNTEP", – 2016. – 364 s.

MASOFAVIY TA’LIMDA UCHRAYDIGAN MUAMMOLAR VA ULARNING SABABLARI

Y. E. Meliboyeva
Magistrant, QDU
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610824

Annotatsiya.*Ushbu maqolada masofaviy ta’lim jarayonida uchraydigan asosiy muammolar va ularning kelib chiqish sabablari tahlil qilinadi. Jumladan, internet sifati pastligi, texnik vositalarning yetishmasligi, o‘qituvchi va talabalar o‘rtasidagi muloqotning sustligi, motivatsiya muammolari hamda nazorat tizimidagi kamchiliklar ko‘rib chiqilgan. Shuningdek, masofaviy ta’lim samaradorligini oshirish bo‘yicha taklif va tavsiyalar berilgan.*

Kalit so‘zlar:*masofaviy ta’lim, onlayn ta’lim, pedagogik texnologiyalar, internet muammolari, motivatsiya, raqamli texnologiyalar, ta’lim sifati, elektron ta’lim, kommunikatsiya, ta’lim jarayoni.*

Abstract. *This article analyzes the main problems encountered in distance education and their causes. In particular, issues such as poor internet quality, lack of technical equipment, weak communication between teachers and students, motivational challenges, and shortcomings in the assessment system are discussed. The article also provides recommendations and suggestions for improving the effectiveness of distance learning.*

Keywords: *distance education, online learning, pedagogical technologies, internet problems, motivation, digital technologies, quality of education, e-learning, communication, educational process.*

Аннотация. *В данной статье анализируются основные проблемы, возникающие в процессе дистанционного обучения, а также причины их появления. Рассматриваются такие вопросы, как низкое качество интернет-соединения, недостаток технических средств, слабая коммуникация между преподавателями и студентами, проблемы мотивации и недостатки системы контроля знаний. Также представлены предложения и рекомендации по повышению эффективности дистанционного обучения.*

Ключевые слова:*дистанционное обучение, онлайн-обучение, педагогические технологии, интернет-проблемы, мотивация, цифровые технологии, качество образования, электронное обучение, коммуникация, образовательный процесс.*

Kirish. Masofaviy ta’limning matematika fanlarini o‘qitishda qo‘llanilishi bir qator tizimli muammolarni yuzaga keltirmoqda. Ushbu muammolarni ilmiy tahlil qilish, ularning kelib chiqish sabablarini aniqlash va tizimlashtirish masofaviy ta’lim jarayonini takomillashtirishning muhim shartlaridan biridir. Tadqiqot davomida masofaviy ta’limda uchraydigan muammolar quyidagi asosiy guruhlarga ajratilib, ularning sabablari tizimli ravishda tahlil qilindi:

Texnik va infratuzilmaviy muammolar.

Texnik muammolar masofaviy ta’lim jarayonining samaradorligiga bevosita ta’sir ko‘rsatuvchi omillar sirasiga kiradi. Ushbu muammolar guruhiga quyidagilar kiradi:

Internet va aloqa kanallari muammolari. Pedagogika oliy ta’lim muassasalarida masofaviy ta’limni tashkil etishda talaba va o‘qituvchilarning internet tarmog‘iga barqaror ulanish imkoniyati muhim ahamiyat kasb etadi. Amaliy kuzatishlar va so‘rovnoma natijalariga ko‘ra, talabalarning 23-35 foizi doimiy ravishda yuqori tezlikdagi internetga ega emasligi, 18-22

foizi esa internet ulanishidagi uzilishlar tufayli sinxron mashg‘ulotlarda qatnashish imkoniyatidan mahrum bo‘layotganligi aniqlandi. Ushbu holat, ayniqsa, matematika fanlarini o‘qitishda muhimdir, chunki matematik formulalar, grafiklar va animatsiyalarni uzatish yuqori tarmoq tezligini talab qiladi.

Texnik jihozlar bilan ta’minlanganlik darajasi. Masofaviy ta’lim jarayonida talabalar va o‘qituvchilarning zamonaviy kompyuter texnikasi, planshetlar, interaktiv doskalar, grafik планшетlar kabi maxsus jihozlar bilan ta’minlanganligi muhim ahamiyatga ega. Tadqiqot davomida pedagogika oliy ta’lim muassasalari talabalarining 41 foizi masofaviy ta’lim uchun faqat mobil telefonlardan foydalanishga majbur ekanligi, bu esa matematik formulalar va chizmalar bilan ishlash imkoniyatlarini keskin cheklashi aniqlangan. Xususan, matematik belgilar tizimini (LaTeX, MathML) qo‘llab-quvvatlamaydigan mobil qurilmalar talabalarning o‘quv materiallarini to‘liq o‘zlashtirishiga to‘sqinlik qiladi.

Platformalarning funksional cheklovlari. Mavjud masofaviy ta’lim platformalarining (Moodle, Google Classroom, Microsoft Teams va b.) aksariyati matematika fanlarining o‘ziga xos talablariga to‘liq javob bermaydi. Xususan:

- matematik formulalarni real vaqt rejimida kiritish va tahrirlash imkoniyatlarining cheklanganligi;
- interaktiv grafik va chizmalar qurish vositalarining yetarli emasligi;
- bosqichma-bosqich yechimlarni avtomatik tekshirish funksiyasining mavjud emasligi;
- matematik belgilar tizimini ovozli va video formatda yetkazishdagi texnik cheklovlar.

Ushbu cheklovlar matematikani masofaviy o‘qitish jarayonida interaktivlik va vizuallashtirish tamoyillarini to‘liq amalga oshirishga imkon bermaydi.

Metodik va didaktik muammolar.

Metodik muammolar masofaviy ta’limda matematika fanlarini o‘qitishning o‘ziga xos xususiyatlaridan kelib chiqadigan va o‘quv jarayonining mazmuniy jihatlari bilan bog‘liq bo‘lgan qiyinchiliklarni ifodalaydi.

Matematikani masofaviy o‘qitishning maxsus metodikasining ishlab chiqilmaganligi. An’anaviy ta’limda matematika fanlarini o‘qitishning boy metodik tajribasi mavjud bo‘lsa-da, masofaviy ta’lim kontekstida matematikani o‘qitishning ilmiy asoslangan, kompleks metodik tizimi hali to‘liq shakllantirilmagan. Xususan:

-matematik tushunchalarni masofaviy muhitda shakllantirish bosqichlari (tasavvur → tushuncha → ta’rif → xossalar → qo‘llash) masofaviy texnologiyalarga moslashtirilmagan;

-matematik isbot va mulohazalarni masofaviy muhitda tashkil etish metodikasi ishlab chiqilmagan;

-masofaviy muhitda matematik kompetensiyalarni (hisoblash, mantiqiy fikrlash, modellashtirish, algoritmik) shakllantirishning o‘ziga xos usullari aniqlanmagan.

O‘qituvchilarning masofaviy ta’lim texnologiyalari bo‘yicha tayyorgarlik darajasining yetarli emasligi. Pedagog kadrlarning masofaviy ta’lim texnologiyalarini qo‘llash bo‘yicha tayyorgarligi metodik muammolarning asosiy sabablaridan biridir. So‘rovnoma natijalariga ko‘ra, matematika o‘qituvchilarining 52 foizi masofaviy ta’lim platformalarining matematik funksiyalaridan to‘liq foydalana olmasligini, 67 foizi esa interaktiv matematik kontent yaratish ko‘nikmalariga ega emasligini bildirgan. Ushbu holat o‘qituvchilarning masofaviy ta’lim bo‘yicha malakasini oshirish tizimining yetarli darajada rivojlanmaganligi bilan izohlanadi.

Matematik kontentni masofaviy muhitga moslashtirish muammosi. An’anaviy darslik va o‘quv qo‘llanmalardagi matematik materiallarni masofaviy ta’lim muhitiga moslashtirish quyidagi qiyinchiliklarni keltirib chiqaradi;

-matematik formulalar va ifodalarni elektron formatda (LaTeX, MathML, MathType) to‘g‘ri aks ettirish;
-murakkab chizmalar, grafiklar va geometrik yasashlarni interaktiv shaklda taqdim etish;
-matematik topshiriqlarni avtomatlashtirilgan tekshirish tizimiga moslashtirish;
-video darslarda matematik mulohazalarni bosqichma-bosqich tushuntirish texnologiyalarini qo‘llash.

Masofaviy ta’lim jarayonida ishtirokchilarning psixologik holati, motivatsiyasi va o‘zaro munosabatlari bilan bog‘liq muammolar o‘quv jarayoni samaradorligiga sezilarli ta’sir ko‘rsatadi.

Talabalarning o‘z-o‘zini tashkil etish va motivatsiyasining pastligi. Masofaviy ta’lim sharoitida talabaning mustaqil ishlash faoliyati markaziy o‘rinni egallaydi. Biroq, tadqiqot natijalariga ko‘ra, talabalarning 38 foizi vaqtni boshqarish ko‘nikmalarining yetarli emasligi, 45 foizi esa tashqi nazoratning kamayishi tufayli o‘quv yuklamalarini o‘z vaqtida bajarishda qiyinchiliklarga duch keladi. Matematika fanlarini o‘rganish, o‘zlashtirilgan bilimlarni mustahkamlash uchun muntazam mashq qilishni talab qiladi, bu esa yuqori darajadagi o‘z-o‘zini tashkil etishni zarur qiladi.

Bevosita pedagogik mulohazaning cheklanganligi. Masofaviy ta’limda o‘qituvchi va talaba o‘rtasidagi bevosita mulohaza imkoniyati sezilarli darajada cheklanadi. Matematika fanlarini o‘qitishda bu muammo ayniqsa keskin namoyon bo‘ladi, chunki:
-talabaning matematik mulohazalarini real vaqt rejimida kuzatish va tuzatish imkoniyati kamayadi;
-tushunilmagan mavzuni darhol aniqlashtirish va qayta tushuntirish imkoniyati cheklanadi;
-talabaning yuz ifodasi, imo-ishoralari, savol-javobdagi reaktsiyalari orqali uning mavzuni o‘zlashtirish darajasini baholash qiyinlashadi.

Izolyatsiya va ijtimoiy izolyatsiya hissi. Masofaviy ta’limda talabalar o‘rtasida hamkorlik, birgalikda muammolarni yechish, guruhli muhokama kabi ijtimoiy o‘zaro ta’sir shakllari cheklanadi. Matematika fanlarini o‘qitishda guruhli ishlash, jamoaviy muammoli vaziyatlarni yechish muhim ahamiyatga ega. Tadqiqot davomida talabalarning 61 foizi masofaviy ta’limda o‘zini yakka his qilishini, 53 foizi esa guruhdoshlari bilan birgalikda matematik masalalarni muhokama qilish imkoniyatining cheklanganligini muammo sifatida ko‘rsatgan.

Didaktik muammolar matematika fanlarining mazmuniy xususiyatlaridan kelib chiqadigan va o‘quv jarayonining samaradorligiga bevosita ta’sir ko‘rsatuvchi qiyinchiliklardir.

Matematik tushunchalarni masofaviy muhitda shakllantirish muammosi. Matematik tushunchalar ko‘p hollarda mavhum xususiyatga ega bo‘lib, ularni shakllantirish vizual vositalar, modellar va amaliy harakatlarni talab qiladi. Masofaviy muhitda:
-abstrakt matematik tushunchalarni konkretlashtirish imkoniyatlari cheklanadi;
-uch o‘lchamli geometrik ob’ektlar bilan ishlashda vizualizatsiya darajasi past bo‘ladi;
-matematik modellashtirish jarayonlarini interaktiv tarzda namoyish etish texnik jihatdan murakkabdir.

Yozma hisob-kitoblar va grafik ishlarni nazorat qilishdagi qiyinchiliklar. Matematika fanlarini o‘qitishda talabalarning yozma hisob-kitoblari, chizma va grafik ishlarini tekshirish muhim ahamiyatga ega. Masofaviy ta’lim sharoitida:
-talabaning qo‘lyozma yechimlarini elektron formatda yetkazish va tekshirish murakkablashadi;
-geometrik yasashlarni to‘g‘ri bajarilishini masofadan nazorat qilish imkoniyati cheklanadi;
-hisob-kitoblardagi xatolarni bosqichma-bosqich tahlil qilish va tuzatish ko‘p vaqt talab etadi.

Xulosa. Masofaviy ta’limda uchraydigan muammolar va ularning sabablarini tizimli tahlil qilish shuni ko‘rsatadiki, mavjud qiyinchiliklar kompleks xususiyatga ega bo‘lib, ularni hal etish texnik, metodik, psixologik-pedagogik va tashkiliy jihatlarni o‘z ichiga olgan yaxlit yondashuvni talab qiladi. Matematika fanlarini masofaviy o‘qitishda ushbu muammolarni bartaraf etish, ayniqsa, interaktiv platformalardan foydalanish, maxsus metodikani ishlab chiqish va o‘qituvchilarning tayyorgarlik darajasini oshirish kabi yo‘nalishlarni dolzarb qiladi. Ushbu tadqiqotning keyingi boblarida matematikani masofaviy o‘qitish samaradorligini oshirishga xizmat qiluvchi metodik yechimlar taklif etiladi.

ФОРМИРОВАНИЕ У БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ НАВЫКОВ РАБОТЫ С ЦИФРОВЫМИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМИ ПРИЛОЖЕНИЯМИ

Сетсалиева Зарема Исмаиловна
Преподаватель кафедры «Начальное образование» Кокандского государственного университета
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610865

Аннотация. *В статье рассматриваются особенности формирования у будущих учителей навыков работы с современными цифровыми образовательными приложениями и обоснована необходимость развития цифровой компетентности студентов педагогических вузов в условиях цифровизации образования.*
Ключевые слова: *цифровые технологии, цифровая компетентность, образовательные платформы, методика обучения, педагогическое образование, образовательные приложения.*

Введение. Цифровая трансформация системы образования изменила роль современного учителя. Сегодня педагог выступает не только источником знаний, но и организатором, координатором и аналитиком образовательного процесса. В связи с этим возрастает необходимость подготовки будущих учителей к эффективному использованию цифровых образовательных приложений.

Согласно стандартам ЮНЕСКО, цифровая компетентность педагога включает не только технические навыки, но и методические, аналитические и творческие способности. Учитель должен уметь выбирать цифровые инструменты, адаптировать их к образовательным целям и интегрировать в учебный процесс.

Для учителя это означает способность:

- использовать такие приложения, как GoogleClassroom, **GeoGebra, Desmos, Mathematica, Wolfram Alpha, LearningApps.org, Учи.ру, ЯКласс и другие** для визуализации образовательных процессов;
- разрабатывать цифровые задания, развивающие исследовательские и аналитические навыки учащихся;
- интегрировать цифровые инструменты в традиционные методы обучения, например, при изучении родного языка, алгебры, геометрии и других дисциплин.

Методы. Но процесс подготовки будущих учителей к использованию цифровых приложений не может быть сведён только к обучению работе с программами. Он включает три взаимосвязанных компонента:

Мотивационно-ценностный: формирование понимания, что цифровые приложения – инструмент повышения наглядности и доступности. (сложный график становится понятным через анимацию в GeoGebra).

Содержательно-методический: изучение не столько интерфейса приложений, сколько *методики их встраивания* в урок: на каком этапе использовать Desmos (объяснение нового материала, закрепление или контроль).

Операционально-деятельностный: отработка навыков создания собственных цифровых дидактических материалов (интерактивных листов, онлайн-тестов с математическими формулами).

Процесс подготовки будущих учителей к использованию цифровых приложений должен основываться на нескольких ключевых методических принципах:

1. **Интегративность** – соединение педагогического содержания с цифровыми технологиями.

2. **Практическая ориентированность –** направленность на реальные педагогические задачи и сценарии цифрового обучения.

3. **Проблемное и исследовательское обучение –** вовлечение студентов в решение творческих профессиональных задач с использованием цифровых инструментов.

4. **Рефлексивность** – формирование способности анализировать и оценивать эффективность цифровых ресурсов в обучении.

Формирование цифровой компетентности у будущих учителей можно разделить на три этапа:

- Информационно-мотивационный этап. На этом этапе у студентов формируется осознание важности цифровых технологий. Они знакомятся с типами образовательных приложений и анализируют лучшие практики цифрового обучения.

- Практико-деятельностный этап. Студенты осваивают конкретные инструменты, такие как GeoGebra, Desmos, Google Classroom и Moodle, посредством лабораторных работ, практикумов и учебных симуляций.

- Рефлексивно-аналитический этап. Студенты анализируют собственные цифровые проекты, обсуждают результаты, выявляют сильные стороны и ограничения цифровых инструментов в обучении математике.

Результаты. Результаты проведенной работы показали, что использование системного подхода к подготовке будущих учителей способствует формированию устойчивых навыков работы с цифровыми образовательными приложениями.

Студенты научились:

- использовать цифровые платформы для организации учебного процесса;
- создавать интерактивные задания и онлайн-тесты;
- моделировать математические и геометрические процессы с помощью GeoGebra и Desmos;
- проектировать онлайн-курсы в Moodle и Google Classroom;
- анализировать эффективность цифровых ресурсов с педагогической точки зрения.

В ходе практических занятий были разработаны:

1. Интерактивные уроки с использованием GeoGebra и LearningApps.org.
2. Цифровые математические лаборатории для моделирования геометрических и физических процессов.
3. Онлайн-курсы и учебные модули на платформе Moodle.
4. Системы оценки цифровых образовательных ресурсов по критериям доступности и эффективности.

Полученные результаты подтверждают, что интеграция цифровых технологий в педагогическую подготовку повышает уровень профессиональной компетентности будущих учителей.

Обсуждение. Использование образовательных платформ GeoGebra, Desmos, Google Classroom и других, позволяет сделать процесс обучения более интерактивным,

наглядным и индивидуализированным. Практическая работа студентов с цифровыми приложениями способствует развитию аналитического мышления, навыков самостоятельной работы и проектной деятельности.

Важным условием успешного формирования цифровой компетентности является сочетание традиционных и инновационных методов обучения. Смешанное обучение обеспечивает гибкость образовательного процесса и позволяет студентам осваивать цифровые технологии как в аудитории, так и самостоятельно.

Кроме того, необходимо учитывать, что эффективность внедрения цифровых приложений зависит от уровня методической подготовки преподавателей, технического оснащения образовательных учреждений и готовности студентов к цифровому взаимодействию.

Следовательно, формирование цифровой компетентности будущих учителей должно рассматриваться как непрерывный и комплексный процесс, ориентированный на развитие профессиональной мобильности и адаптации к современным требованиям образовательной среды.

Заключение. Формирование цифровой компетентности требует не только технического обучения, но и развития методического мышления будущего учителя. Особое значение имеет практическая направленность подготовки, позволяющая студентам применять цифровые инструменты в реальных педагогических ситуациях. Использование смешанного обучения, проектной деятельности и цифровых симуляций способствует развитию самостоятельности, исследовательских навыков и профессиональной рефлексии.

Вместе с тем эффективность подготовки зависит от методического сопровождения со стороны преподавателей, наличия цифровой инфраструктуры и интеграции цифровых компетенций в систему оценивания.

Таким образом, подготовка будущих учителей к использованию современных цифровых образовательных приложений является важным направлением развития педагогического образования. Эффективное формирование цифровой компетентности возможно при условии системного подхода, объединяющего мотивационные, методические и практические компоненты.

Использование цифровых платформ и образовательных приложений способствует повышению качества профессиональной подготовки, развитию исследовательских навыков и готовности будущих педагогов к работе в условиях цифровой образовательной среды.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. UNESCO. Digital Literacy in Education: Policy Brief. Paris, 2021

2. Брыкова Н.А. Цифровая компетентность учителя: структура и пути развития. Педагогика и образование, 2023, № 2, с. 45–51.

3. Горбунова Е.В. Использование цифровых технологий в преподавании математики. Москва: Просвещение, 2022.

4. Z.Setsaliyeva. Methodology for preparing future mathematics teachers to work with modern digital applications. 2025.

BO‘LAJAK O‘QITUVCHILARNING RAQAMLI KOMPETENTLILIGINI RIVOJLANTIRISHNI FRAYER MODELI ASOSIDA DASTURIY TA`MINOTINI JORIY ETISH METODIKASI

Turdaliyev Sodikjon Muminjonovich
O‘qituvchi, QDU
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610886

Annotatsiya. *Ushbu maqolada bo‘lajak o‘qituvchilarning raqamli kompetentligini shakllantirishda zamonaviy ta’lim texnologiyalari va elektron ta’limning ahamiyati hamda xorijiy va mahalliy tadqiqotchilarning yondashuvlari tahlil qilingan. Ta`lim platformasi orqali talabalar va o‘qituvchilar uchun interaktiv, ko‘p funksiyali resurslar, o‘quv materiallari taqdim etiladi. Bu esa nafaqat ta’lim mazmunini sifatini oshirishga, balki bo‘lajak o‘qituvchilarda raqamli kompetentlik ko‘nikmalari, amaliy yondashuv va ilmiy bilish ko‘nikmalarini shakllantirishga imkoniyat yaratadi.*

***Kalit so`zlar:*** *raqamli kompetentlik, elektron ta`lim, Frayer modeli*

Аннотация. *В данной статье анализируется значение современных образовательных технологий и электронного обучения в формировании цифровой компетентности будущих учителей, а также подходы зарубежных и местных исследователей. Образовательная платформа предоставляет интерактивные, многофункциональные ресурсы и учебные материалы для учащихся и преподавателей. Это позволяет не только повысить качество учебного контента, но и сформировать у будущих учителей навыки цифровой компетентности, практического подхода и научного знания.*

Ключевые слова*: цифровая компетентность, электронное обучение, модель Фрейера*

Abstract.*This article analyzes the importance of modern educational technologies and e-learning in the formation of digital competence of future teachers, as well as the approaches of foreign and local researchers. The educational platform provides interactive, multifunctional resources and educational materials for students and teachers. This allows not only to improve the quality of educational content, but also to form digital competence skills, practical approach and scientific knowledge skills in future teachers.*

Keywords*: digital competence, e-learning, Frayer model*

Hozirgi davrda zamonaviy axborot ta`lim resurslarining innovatsion tarzdagi salohiyati, tarmoqlarda qo‘llanilishining ko‘p qirraliligi, o‘quv jarayonida hal qilinadigan aniq vazifalarni amalga oshirishga yordam beradi va bu esa bo‘lajak o‘qituvchilarning raqamli kompetentliligi ko‘nikmasi integratsiyalashgan ta`lim resurslaridan optimallashgan oqilona foydlanishiga zamin yaratadi. Shu nuqtai nazardan har bir o‘quv fani bo‘yicha darsliklar, o‘qituvchilar uchun uslubiy didaktik materiallar bilan birgalikda axborot ta`lim platformalarini ham ta`lim tizimi jarayoniga tadbiq qilish muhim vazifalar sifatida qaraladi.

O`quv jarayonining tashkil etishda o`qituvchi va talabalarning o`zaro munosabatlarini to`g`ri tashkil etish yo`llariga ega bo`lishlari lozim. “Axborot texnologiyalarini kasbiy faoliyatda

qo`llash” fani ma`ruza, amaliy va laboratoriya mashg`ulotlari asosiy oqitish shakllari sifatida keltiriladi. Zamonaviy ta’lim tizimi pedagog kadrlar oldiga yangi talablarni qo‘ymoqda. Ayniqsa, raqamli texnologiyalar tezkor rivojlanayotgan hozirgi davrda bo`lajak o‘qituvchilarning raqamli kompetentligiga ega bo‘lishi ularning kasbiy faoliyatida ajralmas vositaga aylanmoqda.

Turli ta`lim yo‘nalishida ta’lim olayotgan talabalarni raqamli kompetentlikka ega shaxs sifatida tayyorlashda “Axborot texnologiyalarini kasbiy faoliyatda qo‘llash” fani muhim metodik va nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi. Mazkur fanni o‘qitishda qo‘llaniladigan ma’ruza darslari, nafaqat bilim uzatish vositasi, balki raqamli texnologiyalarni kasbiy faoliyatga integratsiya qilishga tayyorgarlik ko‘rishning asosiy mexanizmi bo`lib keladi.

Ma’ruza darslarining ahamiyati: Nazariy asoslarni shakllantirish ma’ruza darslari o‘quvchilarga raqamli vositalar, ularning ta’limdagi o‘rni, imkoniyatlari, afzalliklari va cheklovlari haqida izchil, tizimli tushunchalarni beradi. Bu nazariy tayyorgarlik, amaliy mashg‘ulotlarga asos bo‘ladi. Raqamli tafakkurni rivojlantirish talabalar nafaqat texnik vositalarni o‘rganadilar, balki ular asosidagi tamoyillar — axborot oqimlarini boshqarish, algoritmik yondashuv, onlayn muhitda fikr almashish kabi ko‘nikmalarga ega bo‘ladilar. Kasbiy yo‘naltirish vazifasini bajarish, o‘qituvchi ma’ruza davomida real dars vaziyatlarida axborot texnologiyalaridan qanday foydalanish mumkinligini, innovatsion metodikalarni qanday integratsiya qilish mumkinligini ko‘rsatadi.

Zamonaviy axborot ta`lim resursi o‘quv jarayonida quyidagi imkoniyatlar yaratadi:
ta`lim tizimi jarayonida barcha bosqichlarini qo‘llab quvatlash;
masofadan turib o‘qituvchi va talabalar o‘rtasidagi aloqani ta`minlashga imkon beradi;
o‘quv faoliyatida bo‘lajak o‘qituvchilarni qiziqish uyg`otishga oid samarali imkoniyatlarni oshirish orqali raqamli kompetentligini rivojlantirish;
“Axborot texnologiyalarini kasbiy faoliyatda qo‘llash” fanini ko‘rgazmalilik tamoyilini tadbiq qilish imkoniyatlarini ochib berish;
zamonaviy AKT texnologiyalari vositasida darsdan tashqari o‘quv faoliyatini tashkil etish imkoniyatini oshiradi va bu davrida raqamli kompetentlilikga ega o‘qituvchi shaxsini shakllantirish;

Biz dasturiy metodik ta’minot yordamida ma`ruza mashg`ulotlarini tashkil etish uchun Frayer modeli (Frayer diagrammasi) ni taklif etamiz.

Frayer modeli — bu talabalar tomonidan biror atama yoki tushunchani to‘rt asosiy jihatdan tahlil qilish imkonini beruvchi grafik organayzerdir. Ushbu model odatda 4 kvadratdan iborat bo‘lib, ular quyidagicha bo‘linadi: Tushuncha ta’rifi, tushunchaning xususiyatlari (belgilari), misollar va qarama-qarshi misollar (aks holda noto‘g‘ri misollar). Bu model murakkab tushunchalarni aniqlashtirish, ularni amaliyot bilan bog‘lash, analogiyalarni shakllantirish va taqqoslash orqali o‘rganishni chuqurlashtirishga xizmat qiladi. U birinchi marta Doroti Frayer va uning Viskonsin universitetidagi hamkasblari (Ueyn Fredrik va Gerbert Klausmeyer) tomonidan 1969 yilda yaratilgan. Frayer modelining maqsadi **notanish tushunchalar va yangi lug‘atni shaklantirish va umumlashtirishdir.** Diqqat qilinadigan tanlangan so‘z varaqning yoki qog‘ozning o‘rtasiga oval shaklida yoziladi. Ba'zan ovalga nutqning bir qismi kiradi. To‘rt kvadratning har biri bo‘sh va tepasida sarlavha mavjud. Har bir qutining yuqori qismidagi sarlavhalar yoki teglar so‘z **ta'riflari, xususiyatlar, misollar** va misol **bo‘lmaganlarni** o‘z ichiga oladi. So‘zni tasavvur qilish uchun fotosuratlar yoki rasmlar ham qo‘shilishi mumkin.



Frayer modeli **asosiy** bilimlar, oldingi bilimlar yoki shaxsning oldingi hayotiy tajribasidan kelib chiqib yaratiladi. Bog‘lanishlar tushunishni yaxshilaydi va so‘z boyligini oshiradi. Frayer modeli talabalarga so‘zlarning atributlarini va tushunchalar yoki so‘z tuzilishi o‘rtasidagi munosabatlarni tushunishga imkon beradi.

Bu talabalarga nafaqat so‘z boyligini kengaytirish, balki turli tushunchalar haqidagi bilimlarini kengaytirish uchun turli sinflar va fanlar uchun ishlatilishi mumkin. Frayer modeli lug‘atidan foydalanishdan tashqari, siz sinfda foydalanishingiz mumkin bo‘lgan boshqa imkoniyatlarini ham keltirishimiz mumkin: **So‘zni taxmin qilish. Bir tushuncha yoki so‘zni eslatmasdan** to‘liq Frayer modelini ko‘rsatishingiz mumkin . To‘rt bo‘limda berilgan maslahatlarga asoslanib, talabalardan so‘zni taxmin qilishni so‘rashimiz ham mumkin. Agar ular o‘qishdan oldin so‘zni taxmin qila olmasalar, materialning bir qismini o‘qib chiqishlariga ruxsat berish va keyin yana urinib ko‘rish mumkin. Talabalarga to‘liq bo‘lmagan shablonlarni berish. Talabalardan to‘liq bo‘lmagan shablonlarni to‘ldirishga harakat qilishlari mumkin. Ushbu mashq ularga oldingi tushunchalarini faollashtirishga va uni yangi ma'lumotlar bilan bog‘lashga yordam beradi. Talabalarning tanqidiy tahlili, javoblarini asoslash zarur bo‘lganda mashqda rag‘batlantiriladi.

Quyida o`qitishning ma`ruza mashg`ulotining an`anaviy shakli va “Frayer modeli” o`rtasidagi qiyosiy jadvalini keltirib o`tamiz.

Ko‘rsatkichlar	An’anaviy ma’ruza	Frayer modeli asosida ma’ruza
Yondashuv	Ma’ruza o‘qituvchi tomonidan og‘zaki, biryoqlama bayon etiladi. U asosan ma’lumot berishga yo‘naltirilgan. O‘qituvchi bilim manbai, talaba esa tinglovchidir. Dars jarayoni passiv tinglash va konspekt yozish bilan cheklanadi.	Frayer modeli analitik va grafik yondashuvga asoslangan. Talabalar tushunchalarni to‘rt jihatdan (ta’rif, xususiyat, misol, qarama-qarshi misol) tahlil qilish orqali ularni chuqurroq anglaydilar. Bu dars shakli faol ishtirok, tanqidiy fikrlash, guruhiy ish va ko‘rgazmalilikka tayangan.
Talabaning roli	Talaba darsda asosiy tinglovchi, ko‘pincha passiv ishtirokchidir. U dars mobaynida tayyor axborotni eslab qolishga va konspektga yozishga harakat qiladi. Fikr almashish va tahlil qilish imkoniyati cheklangan.	Talaba – faol ishtirokchi, bilim egallashda subyektga aylanadi. U ma’ruza jarayonida grafik jadvalni to‘ldiradi, tushunchani tahlil qiladi, misollar keltiradi va noto‘g‘ri misollarni ajrata oladi. Bu ularning ijodiy va tanqidiy tafakkurini

		rivojlantiradi.
Vizual vositalar	O‘qituvchi doskadan, statik slaydlardan yoki konspektdan foydalanadi. Vizual vositalar asosan tayyor ma’lumotlarni ifodalaydi, ko‘pincha talabaning o‘zi u bilan ishlamaydi.	Frayer modeli – bu o‘ziga xos vizual tahlil vositasi. Diagramma grafik organayzer sifatida qo‘llanadi. Talaba o‘zi jadvalga ma’lumot kiritadi, ko‘rgazmali material bilan bevosita ishlaydi, tushunchalarni o‘z fikri bilan ifodalaydi.
Raqamli kompetentlikni rivojlanishi	Raqamli vositalar cheklangan darajada qo‘llanadi. Talaba faqat slaydlarni ko‘rishi yoki konspekt yozishi mumkin. Texnologik vositalardan foydalanish faolligi past.	Raqamli vositalar (Canva, Jamboard, Padlet, Google Docs, Slides) orqali talabalar mustaqil grafik diagrammalar yaratadi. Bu esa ularning texnologik savodxonligi, axborot tahlil qilish, raqamli hamkorlik qilish ko‘nikmalarini rivojlantiradi.
Metodik imkoniyatlar	Ma’ruza darsining mazmuni o‘qituvchining nutqiga bog‘liq. Talabalarning mustaqil izlanishiga va bilimlarni amaliyotga tatbiq etishiga kamroq imkon beradi.	Frayer modeli orqali tashkil etilgan ma’ruza darslari chuqur tahlil, fanlararo bog‘liqlik va kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirishga xizmat qiladi. U metodik jihatdan zamonaviy yondashuvlarga asoslangan.
O‘quv jarayonini qamrab olishi	Asosan bilim berish (kognitiv daraja) darajasida to‘xtaydi. Talabaning amaliy ko‘nikmasi va kasbiy refleksiyasi sust shakllanadi.	Frayer modeli bilim, tushunish, tahlil, baholash kabi taksonomik bosqichlarni qamrab oladi. U o‘rgatuvchi, faollashtiruvchi va reflektiv yondashuvlarni o‘z ichiga oladi.
Baholash imkoniyatlari	An’anaviy ma’ruzada o‘zlashtirish ko‘proq test, yozma nazorat yoki og‘zaki so‘rov orqali aniqlanadi. Baholash yakuniy xarakterga ega.	Frayer modelida formatif baholash (jarayon davomida baholash) amalga oshadi. Talabaning fikri, tahlili, grafik ifodasi, guruhdagi ishtiroki baholanadi. Bu ko‘proq rivojlantiruvchi baholashga asoslanadi.

Har bir mashg`ulotlar uchun mo`ljallangan texnologik xarita o`qituvchidan ijodkorlik, interaktivlik va o`z vazifasiga ma`suliyat bilan yondashishni talab qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. **Turdaliyev S.M.** Bo‘lajak o‘qituvchilarning raqamli kompetentliligini rivojlantirishda dasturiy-metodik ta’minotning o‘rni va ahamiyati // Guliston davlat universiteti axborotnomasi. – Guliston: Universitet nashriyoti, 2025. – №2 (117). – B. 69–72.
2. **Turdaliyev S.M.** Bo‘lajak o‘qituvchilarni raqamli kompetentliligini rivojlantirishning zaruriyati // International Journal of Education, Social Science & Humanities. – Finland Academic Research Science Publishers, 2025. – Vol. 13, Issue 6. – B. 711–719.
3. **Turdaliyev S.M.** Bo‘lajak o‘qituvchilarning raqamli kompetentliligini rivojlantirishda tashkiliy-pedagogik yondashuvlar // Modern American Journal of Engineering, Technology,

DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ FANINI O‘QITISHDA VEB-KVEST TEXNOLOGIYASIDAN FOYDALANISH METODIKASI

Ummatova Maxbuba Axmedovna
Qo‘qon DU matematika kafedrasi katta o‘qituvchisi
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610912

Annotatsiya.*Mazkur maqolada diskret matematika va matematik mantiq fanini o‘qitishda zamonaviy pedagogik texnologiyalardan biri bo‘lgan veb-kvest texnologiyasining o‘rni, ahamiyati hamda undan foydalanish metodikasi yoritilgan. Shuningdek, talabalar mantiqiy fikrlashini rivojlantirish, mustaqil izlanish faoliyatini tashkil etish va raqamli kompetensiyalarni shakllantirishdagi imkoniyatlari tahlil qilingan.*
Kalit so‘zlar: *matematik mantiq, veb-kvest, pedagogik texnologiya, interfaol ta’lim, mantiqiy fikrlash, raqamli ta’lim, interfaol topshiriq, mustaqil ta’lim.*
Abstract.*This article discusses the role, importance, and methodology of using web-quest technology, one of the modern pedagogical technologies in teaching discrete mathematics and mathematical logic. It also analyzes its potential for developing students' logical thinking, organizing independent research activities, and forming digital competencies.*
Keywords: *mathematical logic, web-quest, pedagogical technology, interactive education, logical thinking, digital education, interactive task, independent learning.*
Аннотация.*В данной статье рассматриваются роль, важность и методология использования технологии веб-квестов, одной из современных педагогических технологий в преподавании дискретной математики и математической логики. Также анализируется её потенциал для развития логического мышления учащихся, организации самостоятельной исследовательской деятельности и формирования цифровых компетенций.*
Ключевые слова: *математическая логика, веб-квест, педагогическая технология, интерактивное образование, логическое мышление, цифровое образование, интерактивное задание, самостоятельное обучение.*

Bugungi kunda ta’lim tizimida axborot-kommunikatsiya texnologiyalaridan samarali foydalanish muhim ahamiyat kasb etmoqda. Ayniqsa, matematik mantiq kabi murakkab va abstrakt fanlarni o‘qitishda zamonaviy interfaol metodlardan foydalanish talabalar bilimini mustahkamlashda katta samara beradi. Shunday innovatsion texnologiyalardan biri - veb-kvest texnologiyasidir.

Veb-kvest - bu internet resurslari asosida tashkil etiladigan muammoli topshiriqlar tizimi bo‘lib, talabalarni mustaqil izlanishga, axborotni tahlil qilishga va ijodiy fikrlashga undaydi. Ushbu texnologiya diskret matematika va matematik mantiq fanini o‘qitishda ayniqsa samarali hisoblanadi, chunki mantiqiy masalalar yechishda izlanish, taqqoslash va xulosa chiqarish muhim o‘rin tutadi.

Diskret matematika va matematik mantiq - matematik tafakkur qonunlarini o‘rganadigan fan bo‘lib, u mulohazalar algebrasi, predikatlar mantiqi, formal tizimlar va algoritmik jarayonlarni qamrab oladi. Ushbu fan talabadan:

- mantiqiy fikrlash;

- tahlil qilish;
- dalillash;
- xulosa chiqarish;
- abstrakt tushunchalarni anglash kabi ko‘nikmalarni talab qiladi.

An’anaviy darslarda talabalar ko‘pincha tayyor bilimni qabul qiluvchi sifatida qatnashadi. Natijada mavzuning mazmunini chuqur anglash va amaliy qo‘llash darajasi pasayadi. Shu sababli matematik mantiqni o‘qitishda talabalarni faol ishtirok etishga undovchi metodlardan foydalanish zarur.

Veb-kvest texnologiyasi ilk bor amerikalik olim Bernie Dodge tomonidan taklif etilgan bo‘lib, internet manbalari asosida tashkil etilgan tadqiqot faoliyatini anglatadi. Veb-kvestda talabalar muayyan muammo yoki topshiriqni bajarish uchun internetdagi ma’lumotlardan foydalanadi.

Veb-kvest quyidagi tarkibiy qismlardan iborat bo‘ladi:

1. Kirish — mavzuga oid muammo yoki vaziyat bayoni.
2. Interfaol topshiriq — bajarilishi kerak bo‘lgan vazifa.
3. Jarayon — topshiriqni bajarish bosqichlari.
4. Resurslar — foydalaniladigan internet manbalari.
5. Baholash mezonlari — natijalarni baholash usuli.
6. Xulosa — bajarilgan ishning yakuniy natijasi.

Mazkur texnologiya talabalarni mustaqil ravishda bilim olishga o‘rgatadi va ularning ijodiy hamda tanqidiy fikrlashini rivojlantiradi.

Matematik mantiq fanida veb-kvest texnologiyasidan foydalanish bir necha bosqichda amalga oshiriladi.

1-bosqich. Mavzuni tanlash bosqichi.

O‘qituvchi avvalo veb-kvest asosida o‘qitishga mos mavzuni tanlaydi. Quyidagi mavzular samarali hisoblanadi:

- mulohazalar algebrasi; Bul funksiyalari; predikatlar mantiqi; mantiqiy teng kuchliliklar; normal shakllar; algoritmlar va formal tizimlar.

Masalan, “Predikatlarni normal shaklga keltirish” mavzusi uchun talabalar internet manbalari yordamida turli usullarni o‘rganib, misollar yechishi mumkin.

2-bosqich. Muammoli topshiriq yaratish bosqichi.

Topshiriq talabalarni izlanishga undashi kerak. Masalan: “Berilgan mantiqiy formulalarni kon’yunktiv va diz’yunktiv normal shaklga keltirishning eng qulay usulini aniqlang va misollar orqali asoslang.” Bunday topshiriq talabalarni faqat tayyor javobni emas, balki yechim jarayonini ham tahlil qilishga majbur qiladi.

3-bosqich. Internet resurslarini tanlash bosqichi.

O‘qituvchi ishonchli va ilmiy manbalarni oldindan tavsiya qiladi. Jumladan:

- elektron darsliklar;
- ilmiy maqolalar;
- video ma’ruzalar;
- interfaol platformalar;
- matematik forumlar.

Bu talabalarni keraksiz axborotlardan himoya qiladi va izlanish samaradorligini oshiradi.

4-bosqich. Guruhli faoliyatni tashkil etish bosqichi.

Talabalar kichik guruhlarga bo‘linadi. Har bir guruh alohida vazifani bajaradi:

- bir guruh nazariy ma’lumot to‘playdi;

- ikkinchi guruh misollar yechadi;
- uchinchi guruh taqdimot tayyorlaydi;
- to‘rtinchi guruh xulosalarni umumlashtiradi.

Natijada hamkorlikda ishlash va kommunikativ kompetensiyalar shakllanadi.

5-bosqich. Natijalarni taqdim etish va baholash bosqichi.

Talabalar o‘z ishlanmalarini taqdimot, jadval yoki elektron loyiha shaklida himoya qiladi. Baholash quyidagi mezonlar asosida olib boriladi:

- mavzuni tushunish darajasi;
- mantiqiy asoslanganlik;
- ijodkorlik;
- internet manbalaridan foydalanish sifati;
- taqdimot madaniyati.

Matematik mantiq fanida veb-kvest texnologiyasidan foydalanish quyidagi afzalliklarni beradi:

- talabalar mustaqil fikrlashga o‘rganadi;
- mantiqiy tafakkur rivojlanadi;
- axborotni izlash va saralash ko‘nikmasi shakllanadi;
- dars jarayoni qiziqarli va interfaol bo‘ladi;
- raqamli kompetensiyalar rivojlanadi;
- jamoada ishlash malakasi shakllanadi.

Shuningdek, talabalar internet orqali turli manbalarni solishtirish orqali mavzuni chuqurroq anglaydi.

Xulosa qilib aytganda, matematik mantiq fanini o‘qitishda veb-kvest texnologiyasidan foydalanish ta’lim samaradorligini oshirishda muhim vosita hisoblanadi. Ushbu texnologiya talabalarni mustaqil ta’lim olishga, mantiqiy va tanqidiy fikrlashga hamda zamonaviy axborot texnologiyalaridan foydalanishga o‘rgatadi. Natijada dars jarayoni interfaol tus olib, talabalar bilimining mustahkamligi ortadi. Kelajakda matematik fanlarni o‘qitishda veb-kvest texnologiyasini yanada kengroq joriy etish va uning metodikasini takomillashtirish dolzarb vazifalardan biri bo‘lib qoladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Akhmedovna, Ummatova Makhbuba. "From the methodology of using nonstandard tests in the design of practical training on number theory." *Genius Repository* 27 (2023): 17-22.

2.Akhmedovna, Ummatova Makhbuba. "Teaching of Numerical Systems and Their Extensions." *Genius Repository* 27 (2023): 23-28.

3.Maxbubaxon, Ummatova, Muydinjanov Davlatjon, and Nematov Bexruzbek. "AFFIN KOORDINATALAR SISTEMASIDA NUQTANI KOORDINATA O ‘QLARIGA NISBATAN SIMMETRIK BO ‘LGAN NUQTANING KOORDINATALARINI TOPISH USULLARI." *INNOVATIVE DEVELOPMENTS AND RESEARCH IN EDUCATION* 2.24 (2023): 329-333.

4.Axmedovna, Ummatova Mahbuba. "USING ANTI-SYMMETRICAL PONYMS IN SOLVING ELEMENTARY MATHEMATICS PROBLEMS." *Galaxy International Interdisciplinary Research Journal* 11.11 (2023): 507-509.

5. Sulaymonov, M. M., and M. A. Ummatova. "KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL OPERATOR ISHTIROK ETGAN INTEGRO-DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN INTEGRAL SHARTLI MASALALAR." *Экономика и социум* 6-2 (109) (2023): 526-530.

6. UMMATOVA, MAXBUBA. "MATEMATIKANI O‘QITISHDA ZAMONAVIY AXBOROT TEXNOLOGIYALARIDAN FOYDALANISH." *Scienceweb academic papers collection* (2023).
7. UMMATOVA, MAXBUBA. "BO‘LINISH BELGILARI, SONLARNING UMUMIY BO‘LUVCHISI VA KARRALI MAVZUSI BO‘YICHA AMALIY MASHG‘ULOTNI LOYIHALASHDA NOSTANDART TESTLARDAN FOYDALANISH METODIKASIDAN." *Scienceweb academic papers collection* (2023).
8. Ummatova, M., and M. Yakubjanova. "About the history of complex numbers."
9. Ummatova, Mahbuba Axmedovna, and Olimaxon Oxunjonovna Rahmonova. "ELEMENTAR MATEMATIKADA ANTISIMMETRIK KO ‘PHADLAR." INTERNATIONAL CONFERENCE DEDICATED TO THE ROLE AND IMPORTANCE OF INNOVATIVE EDUCATION IN THE 21ST CENTURY. Vol. 1. No. 10. 2022.
10. Axmedovna, Ummatova Mahbuba, and Ilhomjonova Shahnozaxon Ilhomjonovna. "TALIMDA BIOLOGIYA VA MATEMATIKA FANLARINING OZARO ALOQASI HAQIDA." BARQARORLIK VA YETAKCHI TADQIQOTLAR ONLAYN ILMIY JURNALI 2.12 (2022): 816-817.
11. Ummatova, Mahbuba Axmedovna, and Abdurahim Tursunboyevich Mamatqulov. "AL-XORAZMIY ASARLARINING AMALIY AHAMIYATI HAQIDA." INTERNATIONAL CONFERENCE DEDICATED TO THE ROLE AND IMPORTANCE OF INNOVATIVE EDUCATION IN THE 21ST CENTURY. Vol. 1. No. 10. 2022.
12. Ahmedovna, Ummatova Mahbuba, and Esonov Munavvarjon Mukimjonovich. "METHODOLOGY OF PERFORMING PRACTICAL INDEPENDENT WORK." Open Access Repository 8.12 (2022): 171-176.
13. Nosirovich, Nosirov Sobirzhon, and Ummatova Makhbuba Ahmedovna. "AUTOMORPHISM OF NUMERICAL SYSTEMS." Open Access Repository .12 (2022): 197-201.
14. Ummatova, M. A. "DIDACTICAL AND PRACTICAL FUNCTIONS OF MATH CLASS." Galaxy International Interdisciplinary Research Journal 10.12 (2022): 259-262.
15. Axmedovna, Ummatova Maxbuba. "ROLЬ ZADACh TEORII ChISEL PRI POVЫIShENII MATEMATIChESKIX ZNANIY UChAЩIXSYa." Uchenыy XXI veka 1-2 (2017).
16. Ummatova, M., G. Axmedova, and O. Maxmudova. "Prakticheskaya napravlennost v obuchenii matematike." Teoriya i praktika sovremennыx gumanitarnыx i yestestvennыx nauk. 2014.
17. Madraximov, Sh Sh, M. A. Ummatova, and G. A. Axmedova. "TENGLAMALARNI YECHISHNING BA’ZI SUN’IY USULLARI." *Scientific Impulse* 1.11 (2023): 624-629.
18.Ummatova, Mahbuba, et al. "INNOVATIVE TOOLS FOR EVALUATING STUDENTS'KNOWLEDGE AND SKILLS IN MATHEMATICS LESSONS." *Евразийский журнал академических исследований* 3.4 Part 4 (2023): 129-132.
19. Умматова, Махбуба, and Темурбек Ёкубов. "ОСНОВНЫЕ ВИДЫ СЛОЖНЫХ СУЖДЕНИЙ." *Interpretation and researches* 1.1 (2023).
20 Умматова, Махбуба, and Саодатхон Кабирова. "МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА–КАК НАУКА О ФОРМАХ И ЗАКОНАХ ПРАВИЛЬНОГО МЫШЛЕНИЯ." *Interpretation and researches* 1.1 (2023).

TA'LIM JARAYONIDA SUN'IY INTELLEKTDAN FOYDALANIB ADAPTIV TA'LIM TIZIMINI ISHLAB CHIQISH

Duskobilova Faxriniso Abdimalik qizi[1], Mordayeva Dilnura Do‘snazar qizi[2]
[1]Termiz davlat universiteti Kompyuter injiniring yo‘nalishi 3-bosqich talabasi
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610926

Annotatsiya. *Ushbu maqolada sun'iy intellekt texnologiyalari asosida adaptiv ta'lim tizimini ishlab chiqishning nazariy va amaliy jihatlari ko‘rib chiqilgan. Tadqiqot an'anaviy ta'limning cheklovlarini tahlil qilish, adaptiv tizimlarning ishlash mexanizmlarini ochib berish, va bunday tizimlarni o‘zbek ta'lim tizimiga joriy etish yo‘llari masalasini qamrab oladi. Tahlillar shuni ko‘rsatdiki, to‘g‘ri arxitekturada qurilgan adaptiv tizim o‘quvchilarning o‘zlashtirish samaradorligini sezilarli darajada oshirishi va o‘qituvchi yukini kamaytirishi mumkin.*

Kalit so‘zlar: *adaptiv ta'lim, sun'iy intellekt, mashinali o‘rganish, bilim grafigi, intellektual ta'lim tizimi, shaxsga yo‘naltirilgan ta'lim, raqamli transformatsiya.*

Аннотация. *В статье рассматриваются теоретические и практические аспекты разработки адаптивной системы обучения на основе технологий искусственного интеллекта. Исследование охватывает анализ ограничений традиционного обучения, раскрытие механизмов функционирования адаптивных систем и пути их внедрения в узбекскую систему образования. Проведённый анализ показывает, что адаптивная система, построенная на правильной архитектуре, способна значительно повысить эффективность усвоения знаний учащимися и снизить нагрузку на учителей.*

Ключевые слова: *адаптивное обучение, искусственный интеллект, машинное обучение, граф знаний, интеллектуальные обучающие системы, персонализированное образование, цифровая трансформация.*

Abstract. *This article examines the theoretical and practical aspects of developing an adaptive learning system based on artificial intelligence technologies. The research covers an analysis of the limitations of traditional education, reveals the operating mechanisms of adaptive systems, and explores pathways for their integration into the Uzbek educational system. The analysis demonstrates that an adaptive system built on the correct architecture can significantly improve learners' academic performance and reduce the workload on teachers.*

Keywords: *adaptive learning, artificial intelligence, machine learning, knowledge graph, intelligent tutoring systems, personalized education, digital transformation.*

Kirish. Ta'lim insoniyat tarixining barcha davrlarida jamiyat taraqqiyotining poydevori bo‘lib kelgan. Biroq bugungi kunda bu soha o‘ziga xos paradoks oldida turibdi: texnologik imkoniyatlar misli ko‘rilmagan darajada kengaygan bir paytda, sinfxona ta'limining asosiy formati deyarli o‘zgarmagan holda qolmoqda. O‘qituvchi bir vaqtning o‘zida 30–40 o‘quvchiga dars o‘tadi, lekin ularning har biri turlicha tezlikda, turlicha usulda o‘rganadi. Bu holat an'anaviy ta'limning tizimiy cheklovidan kelib chiqadi: bir xil tushuntirish, bir xil vazifa, bir xil imtihon — hammaga bir xil.

Benjamin Bloom 1984-yilda o‘tkazgan tadqiqotida ushbu muammoni "ikki sigma muammosi" deb atadi. Uning xulosasiga ko‘ra, yakka tartibdagi ta'lim sinfxona ta'limiga nisbatan o‘quvchi natijalarini ikki standart og‘ishga oshiradi. Boshqacha qilib aytganda, yakka

ta'lim olgan o‘rtacha o‘quvchi ko‘pchilik ta'limidagi eng yaxshi o‘quvchilar qatoriga kiradi. Muammo shundaki, yakka ta'lim iqtisodiy jihatdan barcha uchun mavjud emas[2].

Aynan mana shu bo‘shliqni to‘ldirish uchun sun'iy intellekt (SI) asosidagi adaptiv ta'lim tizimlari paydo bo‘ldi. Ushbu tizimlar har bir o‘quvchiga virtual shaxsiy o‘qituvchi vazifasini bajaradi: savolga javobni tahlil qiladi, xatoni aniqlaydi, bilim darajasini baholaydi va keyingi eng mos materiallar ketma-ketligini taklif etadi. Maqolaning maqsadi — bunday tizimlarning qanday ishlashini ochib berish, ularning ta'limga ta'sirini tahlil qilish va O‘zbekiston sharoitida joriy etish strategiyasini asoslashdan iborat.

An'anaviy sinfxona ta'limini to‘liq inkor etish noto‘g‘ri bo‘lar edi — u asrlar davomida sinalgan va o‘z samaradorligini ko‘rsatgan. Biroq raqamli davrning talablari uni yangilash zarurligini ko‘rsatmoqda. Asosiy cheklovlarni uch guruhga ajratish mumkin.

Birinchi guruh — bilim darajasidagi farqlar. Har qanday sinfda o‘quvchilar turli boshlang‘ich bilim darajasida bo‘ladi. Bir qismi yangi mavzuni bir tushuntirishda o‘zlashtirib olsa, boshqasi uchun bir xil tushuntirish yetarli bo‘lmaydi. O‘qituvchi esa o‘rtacha sur'atda dars o‘tishga majbur: tez o‘quvchilar zerikadi, sekin o‘quvchilar orqada qoladi. Natijada ikki tomonlama samarasizlik yuzaga keladi.

Ikkinchi guruh — o‘rganish uslublari xilma-xilligi. Kognitiv psixologiya sohasidagi tadqiqotlar shuni ko‘rsatadiki, odamlar ma'lumotni turlicha qabul qiladi: bir qismi vizual (ko‘rish orqali), boshqalari audial (eshitish orqali), yana bir qismi kinetik (bajarish orqali) yaxshiroq o‘rganadi. An'anaviy dars esa asosan bir uslubda — o‘qituvchi tushuntiradi, o‘quvchi tinglaydi formatida kechadi.

Uchinchi guruh — teskari aloqaning kechikishi. An'anaviy tizimda o‘quvchi noto‘g‘ri tushuncha bilan haftalab yurishi mumkin — bu faqat test yoki imtihonda aniqlanadi. O‘sha paytga kelib esa xato tushuncha mustahkamlanib qoladi va uni to‘g‘rilash yanada qiyinlashadi. Adaptiv tizim esa har bir javobdan so‘ng darhol qayta aloqa beradi, xatoni zudlik bilan bartaraf etishga yordam beradi.

Adaptiv ta'lim tizimi (ATT) — bu foydalanuvchining xatti-harakati, javoblari va faoliyat ko‘rsatkichlari asosida o‘quv tajribasini real vaqt rejimida moslashtirib boruvchi dasturiy tizim. Bunday tizimlarning ilk ilmiy asoslari 1990-yillarga borib taqaladi.

Corbett va Anderson tomonidan 1994-yilda ishlab chiqilgan "Bilimni kuzatish" (Knowledge Tracing) modeli adaptiv tizimlarning tarixiy asosini tashkil etadi. Ushbu model Bayesdan ehtimollik nazariyasiga asoslanib, har bir o‘quvchi uchun "mazkur ko‘nikmani o‘zlashtirib olganligi" ehtimolligini hisoblaydi va uni har yangi javob asosida yangilab boradi[3].

Zamonaviy ATT ning uchta asosiy komponenti mavjud. Birinchisi — o‘quvchi modeli (Student Model). Bu har bir foydalanuvchining dinamik profilidir: u qanday mavzularni biladi, qayerda qoqiladi, qanday tezlikda o‘rganadi, qaysi vaqtda xato ko‘p qiladi. Bu profil har bir yangi harakat bilan yangilanib boradi va tizimning barcha qarorlarini boshqaradi.

Ikkinchisi — bilim grafigi (Knowledge Graph). Bu o‘quv materialining tuzilma xaritasidir. Masalan, algebra kursi uchun "ko‘paytirish" mavzusi "bo‘lish"ga, u esa "kasrlar"ga, u

[2] Bloom, B.S. (1984). The 2 Sigma Problem: The Search for Methods of Group Instruction as Effective as One-to-One Tutoring. Educational Researcher, 13(6), 4–16.

[3] Bloom, B.S. (1984). The 2 Sigma Problem: The Search for Methods of Group Instruction as Effective as One-to-One Tutoring. Educational Researcher, 13(6), 4–16.

esa "tengsizliklar"ga bog‘liq. Tizim bu bog‘liqliklarni biladi va o‘quvchi bir mavzuni o‘zlashtirib olgandagina keyingisini taklif etadi.

Uchinchisi — tavsiya mexanizmi (Recommendation Engine). Bu ikkala komponentdan ma'lumot olib, "ushbu o‘quvchiga hozir qaysi material eng foydali bo‘ladi?" degan savolga javob beruvchi algoritmdir. Bugungi kunda mashinali o‘rganish — xususan, chuqur o‘rganish (Deep Learning) va mustahkamlash orqali o‘rganish (Reinforcement Learning) metodlari bu masalani ilgarigilardan ancha yuqori darajada hal etishga imkon bermoqda.

Sun'iy intellektning ushbu sohadagi ahamiyati nafaqat tasniflash algoritmlarida, balki til modellarida (Large Language Models) ham namoyon bo‘lmoqda. Zamonaviy SI tizimlari o‘quvchining savolini tahlil qilib, tushuntirish uslubini o‘zgartirishi, misol keltirishi va individual mulohaza yuritishi mumkin — bu an'anaviy dasturiy ta'minotdan sifat jihatdan farq qiladi[4].

O‘zbekistonda raqamli ta'limni rivojlantirish davlat siyosati darajasiga ko‘tarilgan. "Raqamli O‘zbekiston — 2030" strategiyasi doirasida ta'lim sektorini raqamlashtirish ustuvor yo‘nalishlardan biri sifatida belgilangan[5].

Bugungi kunda O‘zbekistonda 10 mingdan ortiq maktab va 200 dan ziyod oliy o‘quv yurti mavjud. Bu ulkan miqyos bir tomondan joriy etish uchun katta bozorni anglatsa, ikkinchi tomondan qator tizimli muammolarni ham birga olib keladi.

Asosiy imkoniyatlar quyidagilardan iborat. Birinchidan, O‘zbekistonda yosh aholi ulushi yuqori — 30 yoshgacha bo‘lganlar umumiy aholi tarkibining 60% dan ortig‘ini tashkil etadi. Bu raqamli ta'lim vositalarini qabul qilishga tayyor auditoriyaning katta ekanligini anglatadi. Ikkinchidan, so‘nggi yillarda internet qamrovi sezilarli darajada oshdi, mobil qurilmalar ommaviylashdi. Bugungi o‘quvchilarning aksariyati smartfondan foydalanadi, ya'ni adaptiv ta'lim platformasiga kirish uchun zarur qurilma allaqachon qo‘lda mavjud.

Asosiy to‘siqlar esa uch yo‘nalishda ko‘rinadi. Birinchi to‘siq — o‘zbek tilidagi sifatli ma'lumotlar to‘plamining (dataset) etishmasligi. Mashinali o‘rganish algoritmlari katta hajmdagi belgilangan ma'lumotlarga muhtoj. O‘zbek tilida ta'lim mazmunini avtomatik tahlil qiluvchi, savollarni baholovchi va bilim darajasini aniqlovchi tizim uchun hali bunday to‘plam shakllantirilmagan.

Ikkinchi to‘siq — o‘qituvchilarning raqamli kompetentsiyasi. Adaptiv tizimni joriy etish o‘qituvchini texnologiya bilan raqobatga kirishishga emas, balki uni mahorat bilan boshqarishga undaydi. Buning uchun esa o‘qituvchilarni qayta tayyorlash zarur — bu oddiy kurs emas, balki pedagogik yondashuv o‘zgarishini talab qiladigan jarayon.

Uchinchi to‘siq — infratuzilma notekisligi. Shaharda tezkor internet bilan ishlaydigan platforma qishloq maktabida ishlamasligi mumkin. Shuning uchun tizim arxitekturasini "past tarmoqda ham ishlash" tamoyili asosida loyihalash, offline-rejimni ta'minlash zarur.

Maqolada taklif etilayotgan yondashuv uch bosqichli modelga asoslanadi. Bu model O‘zbekiston sharoitining o‘ziga xos xususiyatlarini hisobga olgan holda shakllantirilgan.

Birinchi bosqich — diagnostika. O‘quvchi tizimga kirganda uning boshlang‘ich bilim darajasini aniqlaydigan qisqa adaptiv test o‘tkaziladi. Bu test oddiy savollar to‘plami emas: har

[4] Bloom, B.S. (1984). The 2 Sigma Problem: The Search for Methods of Group Instruction as Effective as One-to-One Tutoring. Educational Researcher, 13(6), 4–16.

[5] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 5-oktabrdagi PF-6079-son farmoni «2030-yilgacha bo‘lgan davrda O‘zbekiston Respublikasini raqamli rivojlantirish strategiyasi to‘g‘risida».

bir javobga qarab keyingi savol qiyinligi o‘zgarib boradi. 15–20 ta savol asosida o‘quvchining bilim xaritasi — qaysi mavzular mustahkam, qaysilari zaif — tuziladi.

Ikkinchi bosqich — moslashuvchan o‘quv yo‘li. Boshlang‘ich tashxis asosida tizim o‘quvchi uchun individual o‘quv yo‘lini belgilaydi. Bu yo‘l statik emas — o‘quvchi har bir topshiriqni bajargan sari dinamik ravishda yangilanib boradi. Agar o‘quvchi biror mavzuda ketma-ket xato qilsa, tizim tushuntirishni soddalashtiradi, boshqa misollar keltiradi. Agar materialni tez o‘zlashtirayotgan bo‘lsa, tizim murakkabroq vazifalarga o‘tadi.

Uchinchi bosqich — o‘qituvchi uchun analitika paneli. Tizim o‘quvchilar haqidagi ma'lumotlarni to‘playdi, lekin bu ma'lumot o‘qituvchidan yashirilmaydi — aksincha, unga sinfdagi har bir o‘quvchining holati, qayerda qiynalib turishi va qanday yordam kerakligi to‘g‘risida real vaqt ma'lumotlarini taqdim etadi. O‘qituvchi shu tarzda vaqtini ommaviy tushuntirishga emas, aynan muammoli o‘quvchilarga yordam berishga sarflaydi.

So‘nggi yillarda sun'iy intellekt asosidagi adaptiv ta'lim tizimlari butun dunyoda jadal sur'atda joriy etilmoqda. Quyida yetakchi davlatlar va ularning erishgan natijalari keltirilgan.

1-jadval. Yetakchi davlatlar va adaptiv ta'lim natijalari

Davlat	Platforma / Dastur	Asosiy ko‘rsatkich	Natija
AQSh	Khan Academy, i-Ready, IXL	Maktab tumanlarining 82% da SI tashabbusi mavjud; adaptiv tizimlar umumiy onlayn o‘qitish vaqtining 38% ini tashkil etadi	O‘quv materiallari bo‘yicha o‘rtacha 28% tezroq o‘zlashtirish
Xitoy	Squirrel AI Learning	2022-yilda 150 mln AQSh dollariga baholangan; 2 mlrd dollarlik bozor qiymati	An'anaviy o‘qitishga nisbatan 3.6x yuqori natija (RCT tadqiqot)
Finlandiya	Davlat ta'lim platformalari	Maktablarning 91% da SI shaxsiylashtirilgan o‘rganish uchun qo‘llaniladi	Yevropa liderlik o‘rinni egallagan
Buyuk Britaniya	Pearson MyLab va boshqalar	Oliy ta'limda kurs tashlab ketish darajasi 18% ga kamaygan; 2030-yilga qadar 500,000 yangi ish o‘rni yaratilishi kutilmoqda	Kurs yakunlash ko‘rsatkichi 72% dan 91% ga o‘sgan
Ispaniya	Davlat moliyalashtirilgan AI platforma	Matematik bo‘yicha davlat sinovlarida	Foydalanuvchilarning 85% yakuniy baholarini yaxshilagan
BAA	Milliy o‘qituvchi tayyorlash dasturi	Yangi o‘qituvchilarning 100% SI-o‘qitish dasturiga qamrab	Mintaqaviy lider sifatida e'tirof etilgan

Davlat	Platforma / Dastur	Asosiy ko‘rsatkich	Natija
		olingan (2025)	

Xalqaro amaliyot tajribalari shuni ko‘rsatadiki, to‘g‘ri joriy etilgan adaptiv ta'lim tizimlari bir qator o‘lchanadigan natijalarga olib keladi. Biroq ushbu natijalar kontekstdan mustaqil emas — ularni O‘zbekiston sharoitida nima kutish mumkinligi nuqtai nazaridan ko‘rib chiqish kerak.

O‘zlashtirish ko‘rsatkichi bo‘yicha xalqaro meta-tahlillar adaptiv tizimlar qo‘llanilgan holatlarda test natijalarining o‘rtacha 20–35% ga yaxshilanishini qayd etgan. Biroq bu raqam tizim sifatiga, predmet yo‘nalishiga va o‘quvchi auditoriyasiga jiddiy bog‘liq. O‘zbekiston maktablarida, ayniqsa matematika va tabiiy fanlar yo‘nalishida, bunday natijaga erishish real, chunki bu fanlar aniq struktura va ketma-ket o‘rganish mantiqiga asoslanadi.

Vaqt sarfi nuqtai nazaridan, adaptiv tizimlar odatda o‘sha darajadagi natijani an'anaviy ta'limga qaraganda 30–40% kam vaqtda ta'minlaydi. Bu o‘quvchi uchun qimmatli, chunki u darsdan tashqari vaqtini individual zaif tomonlarini qoplashga sarflamaydi — tizim bu ishni avtomatik bajaradi.

O‘qituvchi mehnatining qayta taqsimlanishi ham muhim natija hisoblanadi. Adaptiv tizim joriy etilgan sinflarda o‘qituvchilar tekshirish va uy vazifalarini baholashga sarflaydigan vaqtni 40–50% ga qisqartirib, shu energiyani ijodiy va interaktiv dars o‘tishga yo‘naltira oladilar. Bu o‘qituvchining rolini tugatmaydi — balki uning eng qimmatli: insoniy aloqa, motivatsiya va chuqur tushuntirish jihatiga qaytaradi.

Xulosa.Ta'limda sun'iy intellektdan foydalanish — bu texnologik moda emas, balki tizimiy zarurat. An'anaviy ta'lim o‘z davrida inqilob bo‘lgan, biroq bugungi kunning talablari yangicha yondashuvni taqozo etmoqda. Adaptiv ta'lim tizimlari mana shu yangi yondashuvning amaliy ko‘rinishidir.

Ushbu maqolada ko‘rib chiqilgan tahlil asosida quyidagi xulosalarga kelish mumkin: birinchidan, an'anaviy ta'limning asosiy zaifligi — individual farqlarni inobatga olmaslik muammosi — texnologik vositalar orqali hal etilishi mumkin; ikkinchidan, adaptiv tizimlarning samaradorligi faqat algoritmga emas, balki bilim grafigi sifatiga, o‘quv mazmunining darajasiga va o‘qituvchi bilan integratsiyaga bog‘liq; uchinchidan, O‘zbekistonda bunday tizimni joriy etish uchun texnologik zamin yetarlicha shakllanmoqda, lekin asosiy ish — o‘zbek tilidagi sifatli ta'lim ma'lumotlar bazasini yaratish va o‘qituvchi kadrlarni tayyorlash — oldinda turibdi.

Kelajakda tadqiqotni amaliy yo‘nalishda davom ettirish — ya'ni prototip tizimini ishlab chiqish, uni real maktab muhitida sinab ko‘rish va natijalari bo‘yicha empirik tahlil o‘tkazish — ustuvor vazifa bo‘lib qoladi. Shundagina nazariy xulosalar amaliy dalil bilan mustahkamlanadi va tizimni keng joriy etish uchun asos vujudga keladi.

Foydalanilgan Adabiyotlar:

1. Bloom, B.S. (1984). The 2 Sigma Problem: The Search for Methods of Group Instruction as Effective as One-to-One Tutoring. Educational Researcher, 13(6), 4–16.
2. Corbett, A.T., & Anderson, J.R. (1994). Knowledge Tracing: Modeling the Acquisition of Procedural Knowledge. User Modeling and User-Adapted Interaction, 4(4), 253–278.
3. Russell, S., & Norvig, P. (2021). Artificial Intelligence: A Modern Approach (4th ed.). Hoboken: Pearson.

4. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 5-oktabrdagi PF-6079-son farmoni «2030-yilgacha bo‘lgan davrda O‘zbekiston Respublikasini raqamli rivojlantirish strategiyasi to‘g‘risida».

TEBRANISHLARDAN HIMOYALANUVCHI STERJENNING TASODIFIY TEBRANISHLARIDA USTUVORLIK CHEGARALARINI ANIQLASH

O.M. Dusmatov[1], M.U. Xodjabekov,[2] A.E. Qudratov[3]
[1]Samarqand davlat universiteti, dusmatov62@bk.ru,
[2]Samarqand davlat arxitektura qurilish universiteti, uzedu@inbox.ru,
[3]Samarqand davlat pedagogika institute, a_qudratov1985@mail.ru.
https://doi.org/10.5281/zenodo.20610955

Annotatsiya. *Ushbu ishda tasodifiy qo‘zg‘alishlar ta’sirida gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali sterjenning dinamik so‘ndirgichlar bilan birgalikdagi chiziqlimas ko‘ndalang tebranishlari ustuvorligi tekshirilgan. Ustuvorlik chegarasi ifodasi sistema parametrlariga bog‘liq holda analitik ko‘rinishda olinib, sonli hisoblashlar natijasida ustuvorlik chegaralari tahlil qilingan, xulosalar keltirilgan.*

Kalit so‘zlar. *elastik, dissipativ, gisterezis, sterjen, tasodifiy tebranish, dinamik so‘ndirgich, o‘rta kvadratik qiymat.*

Аннотация. *В данной работе исследуется устойчивость нелинейных поперечных колебаний стержня с гистерезисной упругой диссипативной характеристикой под воздействием случайных возмущений совместно с динамическими гасителями. Выражение границы устойчивости получено в аналитической форме в зависимости от параметров системы, а также проведён анализ границ устойчивости на основе результатов численных расчётов и представлены выводы.*

Ключевые слова. *упругость, диссипация, гистерезис, стержень, случайные колебания, динамический гаситель, среднеквадратическое значение.*

Abstract. *This study investigates the stability of nonlinear transverse vibrations of a beam with hysteretic elastic dissipative characteristics under the influence of random excitations, together with dynamic absorbers. The expression for the stability boundary is derived in analytical form depending on the system parameters, and a numerical analysis of the stability boundaries is performed, with conclusions presented.*

Keywords. *elasticity, dissipation, hysteresis, beam, random vibrations, dynamic absorber, root mean square value.*

Kirish. Turli mexanik sistemalarda hosil bo‘ladigan zararli tebranishlar pasaytirish, ularning ustuvor harakatlarini ta’minlash masalalari dolzarb muammolardan hisoblanadi. Tashqi kuchlar ta’siridagi mexanik sistemalarda chiziqlimas tebranishlar jarayonlarini o‘rganish alohida ahamiyatga ega. Chiziqlimas dissipativ xususiyatlarga ega mexanik sistemalarning dinamik so‘ndirgichlar yordamida tebranishlarni pasaytirish masalasi keng o‘rganilgan. Analitik usullar, xususan chiziqlilashtirish usullarini tatbiq etib, olingan yechimlar yordamida sonly hisoblash natijalari tahlil qilinib, ularning yuqori aniqligi tasdiqlangan [1,2]. Shu bilan birga, tashqi qo‘zg‘atuvchi kuch amplitudasining ortishi ma’lum chastota diapazonlarida tebranishlarning pasayishiga olib kelishi aniqlangan. Bunda dinamik so‘ndirgichlarning optimal parametrlarini aniqlash natijasida samaradorligini oshirish uchun uning chiziqlimaslik dissipativlik xususiyatlarini hisobga olish muhim hisoblanadi.

Ushbu ishda sterjen va unga o‘rnatilgan ikkita dinamik so‘ndirgichlarning birgalikdagi chiziqlimas ko‘ndalang tasodifiy tebranishlarida ustuvorligini tekshirish masalasini qaraymiz.

Sterjen va dinamik so‘ndirgichlarni elastik demferlovchi elementlari materiallarining dissipativlik xususiyatlarini ifodalovchi chiziqlimas bir qiymatli bo‘lmagan funksiya statistik chiziqlilashtirish usulini qo‘llash natijasida chiziqli kompleks funksiya ko‘rinishida olingan.

Matematik modeli va yechish metodikasi. Ushbu maqolada tasodifiy qo‘zg‘alishlar ta’sirida gisterezis tipidagi dissipativ xarakteristikali tebranishlardan himoyalanuvchi sterjenning chiziqlimas tebranishlari ustuvorligi tekshirilgan.

Bunda vertikal urinmalar usulidan foydalanilgan. Tasodifiy qo‘zg‘alishlar ta’sirida gisterezis tipidagi dissipativ xarakteristikali tebranishlardan himoyalanuvchi sterjenning chiziqlimas tebranishlari ustuvorligi sharti quydagicha bo‘ladi:

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{1n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}+\frac{D_{W_0}\alpha}{\psi_*}\frac{\partial}{\partial\sigma_{\zeta_1}}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{1n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}\times$$
$$\times\Bigg[\frac{\frac{\partial}{\partial\sigma_{\zeta_1}}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{3n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{2n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}}{\left(2\sigma_{\zeta_1}-\frac{\partial}{\partial\sigma_{\zeta_1}}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{2n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}\right)\left(2\sigma_{\zeta_2}-\frac{\partial}{\partial\sigma_{\zeta_2}}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{3n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}\right)}+$$
$$+\frac{\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{3n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}}{2\sigma_{\zeta_2}-\frac{\partial}{\partial\sigma_{\zeta_2}}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{3n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}}\Bigg]+\frac{D_{W_0}\alpha}{\psi_*}\frac{\partial}{\partial\sigma_{\zeta_2}}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{1n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}\times$$
$$\times\Bigg[\frac{\frac{\partial}{\partial\sigma_{\zeta_2}}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{2n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{3n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}}{\left(2\sigma_{\zeta_1}-\frac{\partial}{\partial\sigma_{\zeta_1}}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{2n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}\right)\left(2\sigma_{\zeta_2}-\frac{\partial}{\partial\sigma_{\zeta_2}}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{3n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}\right)}+$$
$$+\frac{\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{2n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}}{2\sigma_{\zeta_1}-\frac{\partial}{\partial\sigma_{\zeta_1}}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{2n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}}\Bigg]=\infty. \qquad (1)$$

bu yerda $\sigma_{\zeta_1},\sigma_{\zeta_2}$ - lar mos ravishda dinamik so‘ndirichlar ko‘chishlarining o‘rtacha kvadratik qiymatlari; D_{W_0} —asos tezlanishining dispersiyasi; v — tebranishlar spektirida ehtimoli yuqori chastota; α —tebranishlar spektri kengligini xarakterlovchi parametr;

$$\psi_*=1-\frac{\frac{\partial}{\partial\sigma_{\zeta_2}}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{2n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}\frac{\partial}{\partial\sigma_{\zeta_1}}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{3n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}}{\left(2\sigma_{\zeta_1}-\frac{\partial}{\partial\sigma_{\zeta_1}}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{2n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}\right)\left(2\sigma_{\zeta_2}-\frac{\partial}{\partial\sigma_{\zeta_2}}\frac{\sum_{n=0}^{14}\chi_{3n}v^{n+3}}{\sum_{n=0}^{11}\psi_n v^n}\right)}.$$

$$\sum_{n=0}^{14}\chi_{1n}(\sigma_{\zeta_1},\sigma_{\zeta_2})v^{n+3};\qquad\sum_{n=0}^{14}\chi_{2n}(\sigma_{\zeta_1},\sigma_{\zeta_2})v^{n+3};$$

$\sum_{n=0}^{14} \chi_{3n}(\sigma_{\zeta_1}, \sigma_{\zeta_2}) v^{n+3}$; $\sum_{n=0}^{11} \psi_n(\sigma_{\zeta_1}, \sigma_{\zeta_2}) v^n -$

lar sistema parametrlariga bog‘liq bo‘lgan ko‘phadlar.

Aniqlangan (1) tenglik v tebranish ehtimoli yuqori bo‘lgan chastotaning biror qiymatida bajarilsa, qaralayotgan gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali serjen va dinamik so‘ndirgichlarning birgalikdagi ko‘ndalang statsionar tasodifiy tebranishlari noustuvor, aks holda ustuvor bo‘ladi.

Sonli hisoblashlar va natijalar tahlili. Tasodifiy qo‘zg‘alishlar ta’sirida gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali sterjen va uning gisterezis tipidagi dissipativ xarakteristikali dinamik so‘ndirgichlar bilan birgalikdagi ko‘ndalang tebranishlarida ustuvorlik shartlari, sohalari hamda chegaralarini sistema parametrlarining turli qiymatlarida sonli tahlil qilamiz.

Bunda ikki uchlari qistirib mahkamlangan sterjen materiali uchun 40X markali po‘latni olamiz [3].

$$E = 2{,}08 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2};\ \rho = 7810\ \frac{kg}{m^3}.$$

Sterjenning o‘lchamlarini quyidagicha olamiz:

$$l = 25 \cdot 10^{-2}\ m; b = 10^{-2}\ m; h = 2 \cdot 10^{-3}\ m; F = 2 \cdot 10^{-4} m^2.$$

$$m_c = \rho F l = 3{,}950525 \cdot 10^{-2}\ kg.$$

Dinamik so‘ndirgichlarning massalarini va elastik elementlarining bikrlik koeffitsiyentlarini quyidagicha olamiz:

$$m_1 = m_2 = 0{,}0027335\ kg;\ c_1 = c_2 = 600\ \frac{N}{m}.$$

U holda $n_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}} = 468{,}5\ s^{-1};\ n_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}} = 468{,}5\ s^{-1}.$

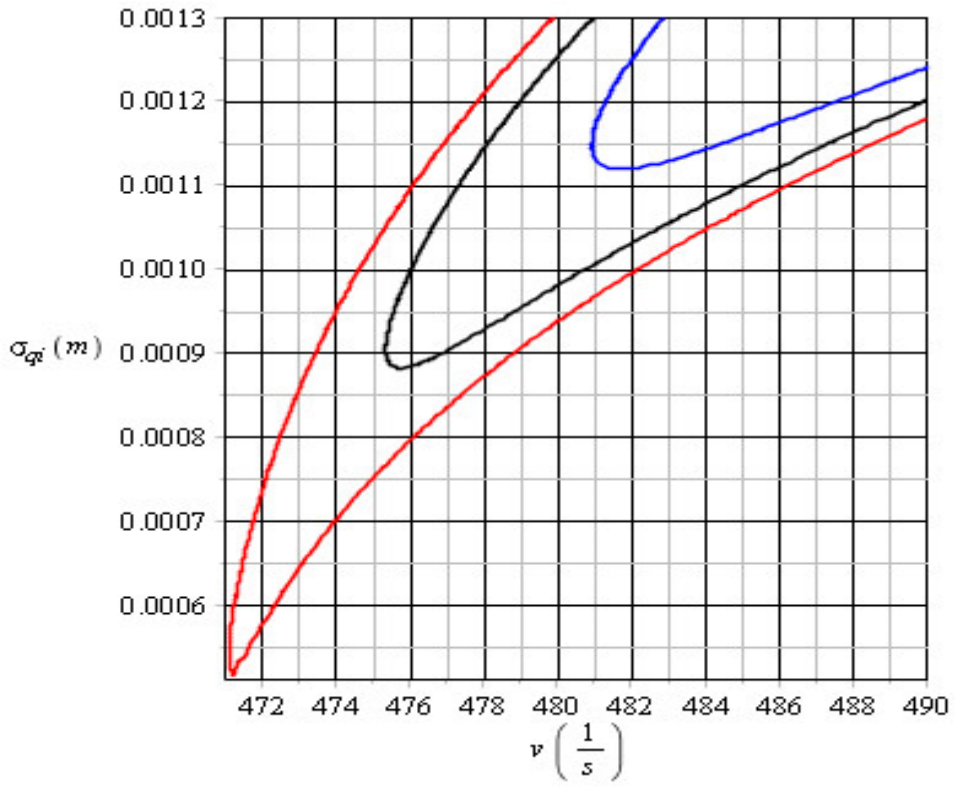
Xususiy tebranish formasini

$$u_i(x) = sin \frac{i\pi}{l} x, \qquad (2)$$

ko‘rinishda olsak, u holda dinamik so‘ndirgich o‘rnatilgan $x_1 = \frac{l}{3}, x_2 = \frac{2l}{3}$ nuqtalarda $u_{i1} = 0{,}8660254037, u_{i2} = 0{,}8660254035.$

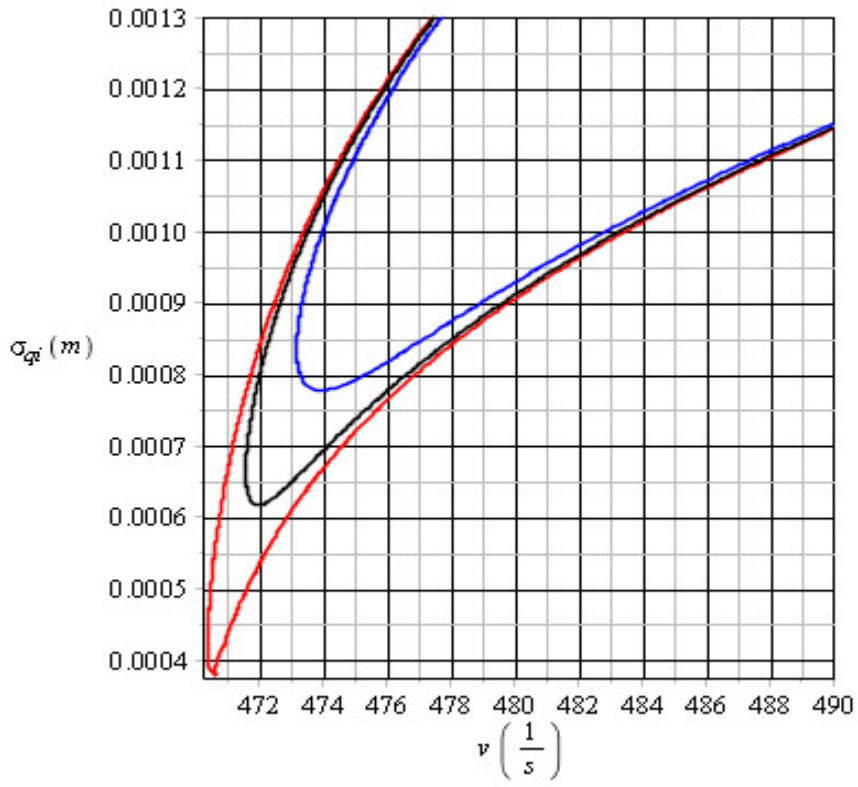
$$\mu_0 = \frac{1}{d_{2i}} = \frac{1}{\int_0^l u_i^2(x)dx} = 8; \mu_1 = \frac{m_1}{m_c} = 0{,}07;\ \mu_2 = \frac{m_2}{m_c} = 0{,}07.$$

(1) ustuvorlik chegarasi ifodasining grafigini chizamiz.



1-rasm. (1) ustuvorlik chegarasi ifodasining grafigi $(\varphi_{1t} \neq 0, \varphi_{2t} \neq 0, \gamma_{1t} \neq 0, \gamma_{2t} \neq 0)$.

1-rasmda (1) ustuvorlik chegarasi ifodasining grafigi $\varphi_{1t} \neq 0, \varphi_{2t} \neq 0, \gamma_{1t} \neq 0, \gamma_{2t} \neq 0, \alpha = 0.001\ (qizil); 0.005\ (qora); 0.01\ (ko'k)$ bo‘lgan hollar uchun tasvirlangan. Bu grafiklardan shuni aytish mumkinki, α tebranishlar spektr kengligini tavsiflovchi parametrning ortishi ustuvorlik chegarasining yuqori chastota va amplitudalarga ko‘chishiga olib keladi. $\alpha = 0.001\ (qizil)$ bo‘lganda $\sigma_{q_i} > 5.2 \cdot 10^{-4}\ m$ oraliqda noustuvor tebranishlar hosil bo‘ladi. $\alpha = 0.01\ (ko'k)$ bo‘lganda esa $\sigma_{q_i} > 8.6 \cdot 10^{-4}\ m$ oraliqda noustuvor tebranishlar hosil bo‘ladi. Bundan α tebranishlar spektr kengligini tavsiflovchi parametrning $\alpha = 0.001\ (qizil)$ qiymatida butun chastotalar o‘qi va $\sigma_{q_i} < 5.2 \cdot 10^{-4}\ m$ bo‘lgan soha ustuvor tebranishlarga mos kelishini aytish mumkin.



2-rasm. (1) ustuvorlik chegarasi ifodasining grafigi $(\varphi_{1t} \neq 0, \varphi_{2t} = 0, \gamma_{1t} \neq 0, \gamma_{2t} = 0)$.

2-rasmda (1) ustuvorlik chegarasi ifodasining grafigi $\varphi_{1t} \neq 0, \varphi_{2t} = 0, \gamma_{1t} \neq 0, \gamma_{2t} = 0, \alpha = 0.001\ (qizil); 0.005\ (qora); 0.01\ (ko'k)$ bo‘lgan hollar uchun tasvirlangan. Bu grafiklardan shuni aytish mumkinki, α tebranishlar spektr kengligini tavsiflovchi parametrning ortishi ustuvorlik chegarasining yuqori chastota va amplitudalarga ko‘chishiga olib keladi. $\alpha = 0.001\ (qizil)$ bo‘lganda $\sigma_{q_i} > 3.6 \cdot 10^{-4}\ m$ oraliqda noustuvor tebranishlar hosil bo‘ladi. $\alpha = 0.01\ (ko'k)$ bo‘lganda esa $\sigma_{q_i} > 7.8 \cdot 10^{-4}\ m$ oraliqda noustuvor tebranishlar hosil bo‘ladi. Bundan α tebranishlar spektr kengligini tavsiflovchi parametrning $\alpha = 0.001\ (qizil)$ qiymatida butun chastotalar o‘qi va $\sigma_{q_i} < 3.6 \cdot 10^{-4}\ m$ bo‘lgan soha ustuvor tebranishlarga mos kelishini aytish mumkin. Bundan tashqari 1-rasm va 2-rasmlardagi grafiklardan shuni aytish mumkinki, dinamik so‘ndirgichlar elastik elementlari materialida energiyaning tarqalishini hisobga olish noustuvor tebranishlarni o‘rtacha kvadratik qiymatning katta qiymatlarida hosil qiladi. Bunda ustuvor va noustuvor sohalar ham o‘zgaradi.

Xulosa. Ustuvorlik chegaralari sistema konstruktiv parametrlariga bog‘liq holda analitik ko‘rinishda aniqlandi. Sonli tahlil qilinib, sterjen va dinamik so‘ndirgichlarning birgalikdagi ko‘ndalang ustuvor hamda noustuvor tebranishlariga mos keluvchi parametrlar intervallari aniqlandi. Tasodifiy qo‘zg‘alishlar ta’siridagi gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali sterjen va dinamik so‘ndirgichlarning birgalikdagi ko‘ndalang tebranishlarida rezonans egri chizig‘ining vertikaldan og‘ishini hisobga olmaslik, chastotalar o‘qida o‘rtacha kvadratik qiymatni oshishiga olib keladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Дусматов О. М. **Моделирование динамики виброзащитных систем.** – Ташкент: Фан, 1997. – 168 с.
2. Павловский М. А., Рыжков Л. М., Яковенко В. Б., Дусматов О. М. Нелинейные задачи динамики виброзащитных систем. Киев: Техника, 1997. 204 с.
3. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов : справочник / Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. - Киев : Наукова думка, 1971. - 374 с. : ил. - Библиогр.: с. 369-372.

MATEMATIKADAN XALQARO BAHOLASH TIZIMLARINI O‘ZBEKISTON TA'LIM TIZIMIDA BUGUNGI KUNDA TUTGAN O‘RNI

Abdullayeva Ma’rifatxon Salimjon qizi[1], Sodiqova Nargizaxon[2]
[1]Qoqon davlat universiteti, Aniq fanlar va muhandislik fakulteti
Matematika kafedrasi o‘qituvchisi,
[2] 1-kurs talabasi
https://doi.org/10.5281/zenodo.20644208

Annotatsiya. *Ushbu maqolada matematika fanidan o‘tkaziladigan xalqaro baholash tizimlari — PISA, TIMSS va PIRLS dasturlarining mohiyati, tuzilishi va baholash mezonlari tahlil qilinadi. O‘zbekiston Respublikasining ushbu xalqaro baholashlarga qo‘shilish tarixi, erishilgan natijalar va ularning milliy ta'lim sifatiga ta'siri o‘rganiladi. Bundan tashqari, mamlakatimizda matematika ta'limini xalqaro standartlarga moslashtirish yo‘lida amalga oshirilayotgan islohotlar hamda kelgusidagi strategik yo‘nalishlar muhokama etiladi.*
Kalit so‘zlar*: PISA, TIMSS, PIRLS, matematika savodxonligi, xalqaro baholash, ta'lim islohoti, kompetentsiyaviy yondashuv, O‘zbekiston ta'lim tizimi.*

Kirish. Globallashuv jarayoni barcha sohalarda bo‘lgani kabi ta'lim sohasida ham davlatlar o‘rtasida taqqoslash va hamkorlik imkoniyatlarini kengaytirmoqda. Bugungi kunda dunyodagi yetakchi davlatlar o‘z ta'lim tizimlarini xalqaro standartlarga moslashtirib, o‘quvchilarning bilim va ko‘nikmalarini global miqyosda baholashga katta e'tibor qaratmoqda.

Matematika fani — insonning analitik fikrlash, muammolarni hal etish va mantiqiy xulosalar chiqarish qobiliyatlarini rivojlantirishda eng muhim vositalardan biri hisoblanadi. Shu bois, xalqaro baholash dasturlari orasida matematika savodxonligini o‘lchash alohida o‘rin tutadi.

O‘zbekiston Respublikasi ham so‘nggi yillarda ta'lim islohotlarini jadallashtirib, 2022-yilda PISA va 2023- yilda TIMSS kabi nufuzli xalqaro baholash dasturlariga qo‘shildi. Bu qadam mamlakatimiz ta'lim sifatini jahon andozalari bilan taqqoslash va zaif tomonlarni aniqlash imkonini berdi.

Mazkur maqolaning maqsadi — xalqaro baholash tizimlarining mohiyatini ochib berish, O‘zbekiston natijalari tahlili asosida milliy ta'limdagi muammolarni aniqlash va yechim yo‘nalishlarini taklif etishdan iborat.

PISA — Iqtisodiy hamkorlik va taraqqiyot tashkiloti (OECD) tomonidan 2000- yildan beri har uch yilda bir marta o‘tkazilib kelinayotgan xalqaro baholash dasturidir. Dasturning asosiy maqsadi 15 yoshli o‘quvchilarning matematika, o‘qish savodxonligi va tabiiy fanlar bo‘yicha hayotiy bilim va ko‘nikmalarini baholashdan iborat.

PISA matematika bloki quyidagi to‘rtta asosiy kompetentsiya sohalarini qamrab oladi: miqdor va son, fazoviy va shakl, o‘zgarish va munosabatlar, hamda noaniqlik va ma'lumotlar. Ushbu sohalar o‘quvchilarning nafaqat matematik bilimlarini, balki ularni kundalik hayot vaziyatlarida qo‘llay olish qobiliyatini ham sinab ko‘radi.

Baholash shkalasi 0 dan 1000 gacha bo‘lib, OECD o‘rtacha ko‘rsatkichi taxminan 472 ball (2022 yil ma'lumotlari bo‘yicha) tashkil etadi. O‘quvchilar natijalariga ko‘ra 1 dan 6 gacha bo‘lgan darajalarga ajratiladi: 1-daraja — eng past, 6-daraja — eng yuqori matematika savodxonligini bildiradi.

TIMSS — Xalqaro ta'lim yutuqlarini baholash assotsiatsiyasi (IEA) tomonidan 1995 yildan buyon har to‘rt yilda o‘tkaziladigan xalqaro tadqiqot bo‘lib, 4 va 8-sinf o‘quvchilarining

matematika va tabiiy fanlar bo‘yicha akademik bilimlarini o‘lchaydi. TIMSS matematika baholashida to‘rt soha ustida e'tibor qaratiladi: sonlar, algebraik ifodalar, geometrik shakl va o‘lchashlar, hamda ma'lumotlar va ehtimollik nazariyasi. Baholash milliy o‘quv dasturlari asosida tuzilgani bois, TIMSS natijalari ta'lim dasturlarining samaradorligini bevosita ko‘rsatib beradi.

PIRLS ham IEA tashkiloti tomonidan har besh yilda o‘tkaziladigan dastur bo‘lib, asosan boshlang‘ich ta'lim (4-sinf) o‘quvchilarining o‘qish savodxonligiga qaratilgan. Biroq dastur doirasida matematik matnlarni tushunish va talqin qilish ko‘nikmalari ham baholanadi.

Matematika nuqtai nazaridan PIRLS ning ahamiyati shundaki, o‘quvchining matematik masalani to‘g‘ri o‘qib, tushunib, keyin yechim topishga o‘tishi uchun o‘qish savodxonligi asosiy shartdir. O‘zbekiston hali PIRLS baholashiga qo‘shilmagan bo‘lsa-da, kelajakda bu dasturga jalb etilishi rejalashtirilmoqda.

O‘zbekiston birinchi marta 2022 yilda PISA baholashiga qo‘shildi. 80 ta davlat va hududdan iborat reyting jadvalida mamlakatimiz matematika bo‘yicha 368 ball to‘plab, 69-o‘rinni egalladi. Bu ko‘rsatkich OECD o‘rtachasidan (472 ball) 104 ball pastda joylashadi. Natijalar tahlili shuni ko‘rsatadiki, o‘zbekistonlik o‘quvchilarning 67 foizi PISA matematika shkalasining 2-darajasidan pastda, ya'ni eng minimal hayotiy matematik ko‘nikmalar egalariga ham ega emas. Faqat 1 foiz o‘quvchi 5 va 6-darajaga eng yuqori natijaga erisha oldi.

Biroq ushbu natijalarni to‘g‘ri baholash uchun kontekstni inobatga olish zarur: O‘zbekiston birinchi marta qatnashganligi, ta'lim sohasidagi resurslar cheklanganligi va sinov formati o‘quvchilar uchun yangi bo‘lganligi muhim omillardir. Shunga qaramay, natijalari bizdan past bo‘lgan davlatlar ham topildi, va bu o‘sish uchun asos bor ekanini ko‘rsatadi.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktyabrdagi "Xalq ta'limi tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasi" to‘g‘risidagi farmonida ta'lim sifatini xalqaro andozalarga moslashtirishga alohida urg‘u berilgan. Ushbu hujjat asosida matematika ta'limida kompetentsiyaviy yondashuv joriy etila boshladi. 2021–2023 yillarda qabul qilingan yangi davlat ta'lim standartlari matematika fanida tanqidiy fikrlash, muammolarni hal qilish va matematik modellashtirish ko‘nikmalarini rivojlantirishni markaziy o‘ringa qo‘ydi. Bu o‘zgarish PISA talablariga mos kelishi bilan birga, o‘quvchilarning mantiqiy-kreativ qobiliyatlarini oshirishga xizmat qiladi.

Finlandiya, Janubiy Koreya va Singapur kabi yuqori natija ko‘rsatgan davlatlarning tajribasi shuni ko‘rsatadiki, muvaffaqiyatning asosiy kaliti o‘qituvchilar malakasi va ijtimoiy mavqeyini oshirishda yotadi. Finlandiyada o‘qituvchilik kasbi aholining eng hurmatli va moddiy jihatdan ta'minlangan kasblaridan biri bo‘lib, pedagogika ta'limi magistr darajasiga ko‘tarilgan.

Xalqaro baholash tizimlari PISA, TIMSS va PIRLS bugungi globallashgan dunyoda ta'lim sifatini ob'ektiv o‘lchashning eng ishonchli vositalaridan biridir. Ular faqat reyting tuzish maqsadida emas, balki har bir davlatning ta'lim zaifliklari va kuchli tomonlarini aniqlashga xizmat qiladi.

Shunday qilib, xalqaro baholash tizimlari O‘zbekiston ta'lim tizimida nafaqat ko‘zgu mamlakatimiz qayerda turganligi ko‘rsatuvchi sifatida, balki kompas qaysi yo‘nalishda harakat qilish zarurligini belgilovchi sifatida ham muhim rol o‘ynamoqda. Ushbu rolni to‘liq anglab yetish va unga mos siyosat yuritish bugungi kunning dolzarb vazifasidir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. OECD (2023). PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education. OECD Publishing, Paris.
2. IEA (2020). TIMSS 2019 International Results in Mathematics and Science. Boston College.
3. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktyabrdagi PF-5847-son Farmoni "Xalq ta'limi tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasi to‘g‘risida".

4. O‘zbekiston Respublikasi Xalq ta'limi vazirligi (2022). Davlat ta'lim standarti. Matematika. Toshkent.
6. UNESCO (2023). Global Education Monitoring Report 2023: Technology in education. Paris: UNESCO.
8. Xalqaro Valyuta Fondi (2023). O‘zbekiston: Ta'lim sohasidagi moliyaviy ko‘rsatkichlar tahlili. IMF Country Report.
9. O‘rinov, M., Xoliqov, A. (2023). "O‘zbekistonda matematika ta'limini xalqaro andozalarga moslashtirish muammolari". Pedagogika jurnali, 4(2), 45–58.
10. Karimov, B. va boshqalar (2022). "PISA baholashi va milliy ta'lim: o‘zaro munosabat". Ta'lim va fan, 3(1), 12–24.

ОБУЧЕНИЕ ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ДЛЯ МАТЕМАТИКОВ И ИНЖЕНЕРНЫХ КАДРОВ

Акбаров Умматали Йигиталиевич[1], Эргашева Дилёра Қобилжон қизи[2]
[1]Кокандский государственный университет, к.-ф.м.н., доцент,
ORSID: 0009-0007-1476-8642,
[2]магистрант КГУ
https://doi.org/10.5281/zenodo.20644235

Аннотация. *В статье рассматриваются вопросы формирования у инженерных кадров знаний и практических навыков по дробному исчислению — области, обобщающей классические понятия производной и интеграла на произвольные порядки. Приведены примеры вычисления дробные интегралы и производная некоторые основные элементарные функций. Раскрывается значение дробных производных и интегралов в инженерных приложениях, подчеркивается необходимость их включения в образовательные программы для развития аналитического и исследовательского мышления студентов технических специальностей.*

Ключевые слова: *дробное исчисление, дробная производная, дробный интеграл, инженерное образование, математическое моделирование, аналитические методы.*

Annotatsiya. *Maqolada muhandislik yo‘nalishidagi kadrlarning kasbiy tayyorgarligini shakllantirishda hosila va integral tushunchalarini ixtiyoriy tartiblarga umumlashtiruvchi kasr tartibli hisila va integral tushunchalari bo‘yicha bilim va amaliy ko‘nikmalarni shakllantirish masalalari ko‘rib chiqiladi. Ba’zi asosiy elementar funksiyalarning kasr tartibli integral va hosilalarini hisoblash misollari keltirilgan. Shuningdek, kasr tartibli hosila va integrallarning muhandislikdagi qo‘llanilishi yoritilgan, hamda ularni texnik yo‘nalishdagi talabalarning analitik va tadqiqot tafakkurini rivojlantirish maqsadida o‘quv dasturlariga kiritish zarurligi ta’kidlab o‘tiladi.*

Kalit so‘zlar: *kasr tartibli hisob, kasr tartibli hosila, kasr tartibli integral, muhandislik ta’limi, matematik modellashtirish, analitik usullar.*

Abstract. *The article examines the formation of knowledge and practical skills in fractional calculus among engineering personnel — a field that generalizes the classical concepts of derivatives and integrals to arbitrary orders. Examples of calculating fractional integrals and derivatives of several basic elementary functions are provided. The significance of fractional derivatives and integrals in engineering applications is revealed, and the necessity of including them in educational programs to develop analytical and research thinking in students of technical specialties is emphasized.*

Keywords: *fractional calculus, fractional derivative, fractional integral, engineering education, mathematical modeling, analytical methods.*

Введение. Современные задачи инженерной науки характеризуются сложными нелинейными и нестационарными процессами, описывающими явления с памятью и наследственностью. Для их адекватного математического моделирования традиционных методов классического анализа зачастую недостаточно. В этих условиях всё большее

значение приобретает дробное исчисление, позволяющее обобщить понятия производной и интеграла на произвольные порядки.

Включение тематики дробных производных и интегралов в образовательный процесс инженерных направлений способствует развитию у студентов навыков работы с современными математическими инструментами. Освоение операторов Римана–Лиувилля, Капуто, Грюнвальда–Летникова и их численных аналогов позволяет будущим инженерам строить более точные модели процессов диффузии, теплопроводности, колебаний, управления и электромагнитных взаимодействий.

Эффективная методика обучения предполагает сочетание теоретического изучения основ дробного исчисления с компьютерным моделированием и решением прикладных задач. Использование систем компьютерной математики (Matlab, Maple, Python) позволяет визуализировать поведение дробных операторов и понять их физический смысл.

Методы. Производные и интегралы дробного порядка и их применение в настоящее время является одной из самых быстроразвивающихся научных областей. Исходя из этого, сначала приводим короткое теоретические сведения по производным и интегралам дробного порядка.

Исторические и теоретические сведения можно найти в работах[1-3], применение и полученные научные результаты можно найти в работах[3-5].

Если $\varphi(x) \in L_1(a,b)$, тогда интегралы вида

$$\left(I_{a+}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{\left(x-t\right)^{1-\alpha}}dt,\ x>a,\ (1)$$

и

$$\left(I_{b-}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)}{\left(t-x\right)^{1-\alpha}}dt,\ x<b,\ (2)$$

называются правосторонними и левосторонними интегралами дробного порядка α Римана-Лиувилля соответственно, где $\alpha>0$, $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ - гамма функция. Настоящие время существует таблицы значения гамма-функций. Свойства этой функций и таблица значения можно найти из интернета или из книг освященные специальные функций.

Приведём таблица дробных интегралов практический важных функций вычисленные по формулы

$$\left(I_{0+}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\left(x-t\right)^{1-\alpha}}dt\ .$$

	Функция $\varphi(x)$	Дробный интеграл $\left(I_{0+}^{\alpha}\varphi(x)\right)$
	x	$\frac{x^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}+C$
	x^2	$\frac{x^{2+\alpha}}{\Gamma(\alpha+3)}\cdot 2!+C$

	x^3	$\frac{x^{3+\alpha}}{\Gamma(4+\alpha)}\cdot 3!+C$
	x^n	$\frac{x^{n+\alpha}}{\Gamma(n+1+\alpha)}n!+C$
	$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{\alpha+2n+1}}{\Gamma(\alpha+2n+2)}+C$
	$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{\alpha+2n}}{\Gamma(\alpha+2n+1)}+C$
	$e^{\lambda x}$	$x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^n}{\Gamma(n+1+\alpha)}=x^{\alpha}E_{1,\alpha+1}(\lambda x)$
	$x^{\beta-1}$	$\frac{\Gamma(\beta)x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)},\ \operatorname{Re}\beta>0$
	$x^{\beta-1}e^{\lambda x}$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}x^{\alpha+\beta-1}{}_1F_1(\beta;\alpha+\beta;\lambda x)$
0	$\sin\lambda\sqrt{x}$	$x^{\alpha+\frac{1}{2}}\lambda\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{(2n+1)!\Gamma\left(n+\alpha+\frac{3}{2}\right)}\left(\lambda^2x\right)^n$ или $\frac{\lambda x^{\alpha+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{}_0F_1\left(\alpha+\frac{3}{2};-\frac{\lambda^2x}{4}\right)$ или $\sqrt{\pi}2^{\alpha-\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}-\alpha}x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}J_{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\lambda\sqrt{x}\right)$
1	$x^{\alpha-1}\sin 2\lambda x$	$\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}+\alpha}\sin\lambda x\cdot J_{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda x)$
2	$x^{-\frac{1}{2}}\cos\lambda\sqrt{x}$	$\sqrt{\pi}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+\alpha}x^{\frac{2\alpha-1}{4}}\cdot J_{\alpha-\frac{1}{2}}\left(\lambda\sqrt{x}\right)$
3	$x^{\alpha-1}\cos 2\lambda x$	$\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}+\alpha}\cos\lambda x\cdot J_{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda x)$
4	$\sinh\lambda\sqrt{x}$	$x^{\alpha+\frac{1}{2}}\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{(2n+1)!\Gamma\left(n+\alpha+\frac{3}{2}\right)}\left(\lambda^2x\right)^n$ или $\sqrt{\pi}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}I_{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\lambda\sqrt{x}\right)$

5	$x^{-\frac{1}{2}}\cosh\lambda\sqrt{x}$	$\sqrt{\pi}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+\alpha} x^{\frac{2\alpha-1}{4}}\cdot I_{\alpha-\frac{1}{2}}\left(\lambda\sqrt{x}\right)$
6	$x^{\beta-1}E_{\nu,\beta}(x^{\nu})$	$x^{\alpha+\beta-1}E_{\nu,\alpha+\beta}\left(x^{\nu}\right),\ \operatorname{Re}\nu>0,\ \operatorname{Re}\beta>0$
7	$x^{\frac{\mu}{2}}J_{\mu}\left(\lambda\sqrt{x}\right)$	$\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\alpha} x^{\frac{\alpha+\mu}{2}} J_{\mu+\alpha}\left(\lambda\sqrt{x}\right),\ \operatorname{Re}\mu>-1$
8	$\ln x$	$\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\ln x+\psi(1)-\psi(\alpha+1)\right]$
9	$x^{\beta-1}\ln x$	$\frac{\Gamma(\beta)x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left[\ln x+\psi(\beta)-\psi(\alpha+\beta)\right],\operatorname{Re}\beta>0$
0	$x^{\beta-1}\,{}_2F_1(\nu,\mu,\beta,\lambda x)$	$\frac{\Gamma(\beta)x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,{}_2F_1(\nu,\mu,\alpha+\beta,\lambda x),\operatorname{Re}\beta>0$

Эти результаты можно получить использованием систем компьютерной математики (Matlab, Maple). Ниже показана результат полученные с помощью Maple11 для функций $\sinh\lambda\sqrt{x}$ для любого α и частного случая α=1.

```
> 1/GAMMA(alfa)*int((x-t)^(alfa-1)*sinh(lambda*t^(1/2)),t=0..x);
                                                    -alfa-1/2
  2^(-1/2+alfa) x^(alfa+1/2) Pi^(1/2) lambda (lambda x^(1/2))
                                                    BesselI(alfa+1/2, lambda x^(1/2))

> 1/GAMMA(1)*int((x-t)^(1-1)*sinh(lambda*t^(1/2)),t=0..x);
                                  2 (lambda x^(1/2) cosh(lambda x^(1/2)) - sinh(lambda x^(1/2)))
                                  ---------------------------------------------------------
                                                          2
                                                         lambda
```

Заключение. Эффективная методика обучения предполагает сочетание теоретического изучения основ дробного исчисления с компьютерным моделированием и решением прикладных задач. Таким образом, обучение дробным производным и интегралам не только расширяет математический кругозор студентов, но и способствует формированию инженерных компетенций, необходимых для инновационной деятельности в науке и технике.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Подлубный И. Дробное исчисление и его приложения. — М.: Физматлит, 1999.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Elsevier, 2006.
3. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. — Gordon and Breach, 1993.

4. Туева Т.В. Дробные производные и интегралы в моделировании физических процессов. — Казань, 2015.

5. Akbarov U.Y. About calculating fractional derivatives and integral using Maple. // JournalNX- A Multidisciplinary Peer Reviewed Journal. VOLUME 9, ISSUE 12, December - 2023, pp.318-321.

ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

А.А.Эргашев[1], Сотволдихонов С.Х[2], Бобохонов С.К[3]
[1]Учитуль,Доцент кафедры Математика при КГПИ
Кокандский Государсвенный Университет Факультет Точных Наук и Инженирии
Напревления Математики и Информатики,
[1,2] 3 –курс группа 01/23 Студенты
https://doi.org/10.5281/zenodo.20644251

Анализируя содержание понятий, сопутствующих основному — «педагогические способности», «профессиональный потенциал педагога», «педагогический профессионализм», «профессиональная педагогическая компетентность», «педагогическое творчество», «педагогическая культура», можно заметить, что авторы выстраивают их в некоторой последовательности, каждый элемент которой соответствует определенному уровню профессиональной педагогической деятельности. Так, относительно недавно применительно к характеристике уровня профессиональной подготовки используется понятие «компетентность». Понятие компетентности шире понятия знания, или умения, или навыка; оно включает их в себя как когнитивную и операционально-технологическую составляющую, а также и мотивационную, этическую, социальную и поведенческую. Под компетентностью (в частности, профессионально-педагогической) понимает общую способность и готовность личности к деятельности (профессионально-педагогической), основанные на знаниях и опыте, которые приобретаются благодаря обучению.

На этой основе мы выделяем следующие уровни профессиональной педагогической деятельности.

I уровень — репродуктивный, включающий педагогические способности и профессиональный потенциал педагога - система естественных и, приобретенных на этой основе в процессе профессиональной подготовки, качеств личности; проявляется в стандартных педагогических ситуациях и может быть еще назван педагогической грамотностью (образованностью);

IIуровень — педагогическая профессиональная компетентность, определяемая как готовность выполнять профессиональную деятельность в соответствии с принятыми стандартами и нормами. Педагогическая компетентность формируется в ходе освоения человеком систем общения и включения в совместную деятельность. Профессионально-педагогическая компетентность может служить интегральной профессионально-личностной характеристикой педагога, т.к. выражается в способности действовать адекватно, самостоятельно и ответственно в постоянно меняющейся профессиональной ситуации.

Ш уровень — педагогическое творчество, проявляется в процессе решения педагогических задач в нестандартных ситуациях. Способность к творческому восприятию, пониманию и преобразованию действительности называют еще профессиональной культурой.

Учебный процесс, по определению М.Н.Скаткина, характеризуется последовательностью развертывания деятельности обучения, т.е. организацией учителем усвоения содержания учебного предмета. Обучение, по словам В.А.Сластенина, есть не что иное, как специфический процесс познания, управляемый педагогом. Общие положения и закономерности, свойственные обучению всем предметам, рассматриваются в дидактике, и поэтому можно условно говорить о «дидактической деятельности» учителя, которая опирается на эти общие закономерности.Вместе с тем, обучение каждому предмету имеет свою специфику, определяемую целью его изучения, содержанием и особенностями усвоения учащимися. Эта специфика учитывается и получает отражение в предметных методиках (или частных дидактиках), поэтому можно условно говорить о «специальной дидактической деятельности» учителя математики. Содержание и структура деятельности учителя в учебном процессе, в том числе и учителя математики, обсуждается в научных исследованиях довольно часто.

Практическая значимость обусловлена возможностью широкого использования полученных результатов и рекомендаций как в системе университетской подготовки учителей, так и в педагогических институтах и институтах усовершенствования педагогических кадров. Разработанная и экспериментально проверенная модель педагогического процесса формирования профессионально-методических умений будущего учителя может служить основой для поиска новых педагогических решений в современной практике непрерывного педагогического образования. В разработках для саморазвития студентов дают возможность наблюдать за процессом формирования профессионализма не только будущего преподавателя, но и специалиста любого профиля, что подтверждается их широким внедрением в деятельность учебных заведений различного типа. Совокупность теоретических положений и практических выводов может найти широкое применение в подготовке и повышении квалификации учителей математики.

В учебном процессе самую важную роль имеет самостоятельное обучение которое даёт студенту для систематической деятельности и направленной на формирование теоретических знаний, практических навыков и компетенций, основанная на самостоятельном усвоении учебного материала, заданий разного уровня сложности, творческом и самостоятельном выполнении практических заданий в аудитории и вне аудитории.

На данный день надо рассматривать различные подходы к разработке тех или иных педагогических технологий, так как эти подходы фактически являются методической инвентаризацией, которую можно рассматривать как некую основу для создания современного методического инструментария учителя, т.е. содержания профессиональной подготовки современного учителя.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Закон “Об образовании Республики Узбекистан // Гармоничное развитое поколение-основа прогресса Узбекистана. Ташкент: Шарк. 1997г. -63с.

4. Национальная программа по подготовке кадров// Гармоничное развитое поколение-основа прогресса Узбекистана. Ташкент: Шарк. 1997г. -63с.

5. Анреев В.И. Педагогика творческого развития. Кн.1 – Казань: Издательство. Каз. Университета. 1996г. -566с.

6. Архангельский С.И. Учебный процесс в высшей школе,его закономерные основы и методы.Учебное пособие. –М.: Высшая школа., 1980г.-368с.
7. П.Беспалько В.П. Слагаемые педагогической технологии.-М.: Педагогика. 1989г. -190с.
8. Иванов В.Г. Проектирований содержания профессионально-педагогической подготовки преподавателя высшей технической школы. – Казань. Карпол. 1997.г. -258с.
9. Эргашев, А. А., &Толибжонова, Ш. А. (2020). Основные компоненты профессионального образования учителя математики. *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, *32*(3), 180-196.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ СРЕДСТВАМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА В УСЛОВИЯХ МАЛОКОМПЛЕКТНОЙ ШКОЛЫ.

Эсонов Мунавваржон Мукимжонович[1], Салихов Амир Тимурович[2]
[1]PhD, старший преподаватель КГУ,
[2]магистрант КГУ
Кокандский государственный университет
https://doi.org/10.5281/zenodo.20644276

Аннотация. *В статье рассматриваются теоретические аспекты формирования логического мышления младших школьников в условиях малокомплектной школы. Обосновывается роль геометрического материала как эффективного средства развития логических операций (сравнения, анализа, синтеза, обобщения). Выявляются особенности организации учебного процесса в малокомплектной школе, а также психолого-педагогические предпосылки развития логического мышления у детей младшего школьного возраста. Материал адресован учителям начальных классов, работающим в условиях малокомплектных школ, методистам и исследователям в области педагогики и психологии обучения.*

Ключевые слова: *логическое мышление, малокомплектная школа, геометрический материал, младшие школьники, логические операции, преемственность обучения.*

Введение

Обучение в школе направлено не только на формирование у учащихся знаний, умений и навыков, но и на развитие школьников. Одной из задач начальной школы, которая определена законодательством и зафиксирована в государственном образовательном стандарте, является создание условий для овладения учащимися элементами логических действий и операций (сравнение, анализ, синтез, обобщение, классификация и т. д.). Развитие логического мышления протекает в несколько этапов, один из которых приходится именно на младший школьный возраст. Поэтому перед учителем стоит задача развивать у школьника самостоятельную логику мышления, позволяющую ему продуцировать умозаключения, доказывать свою точку зрения, используя доказательства и логически связанные между собой высказывания, обращаться к определенным истокам знаний сознательно и по собственной инициативе.

Такие же требования стоят и перед учителями, преподающими занятия в условиях малокомплектной школы. Сначала выясним, в чем преимущество или недостатки таких школ, когда и где организуются такие школы, в чём отличительные качества преподавания уроков.

Один из путей развития логического мышления в условиях малокомплектной школы — использование геометрических задач.

Роль геометрии в развитии логического мышления

Большое значение в развитии логического мышления младшего школьника отводится математике, а именно геометрии. Эта наука отличается высоким уровнем

абстракции и переходом в воспроизведении знаний от абстрактного к конкретному. Именно задания геометрического характера отвечают всем критериям формирования и развития логического мышления. Решение геометрических задач не только способствует более качественному проведению уроков, но и формирует развитие логического мышления, так как в таких школах в одном классе учатся разновозрастные ученики, а преподавателю отведено столько же времени на урок, как и в обычных школах.

Но у родителей есть такие представления: чем больше заниматься, тем выше будут успехи у ребёнка. Однако это не всегда так. Тут надо учитывать специфику предмета, учитывать генетические способности ученика и т.д.

В начальной школе обязательно надо учить стихи, запоминать правила, тогда происходит развитие памяти, мышления, речи. А сейчас знание не приобретается, его заменяет информация, которую можно скачать из интернета. Скопировали, зафиксировали, и ... оно пропало.

Особенности организации обучения в малокомплектной школе

Чтобы в условиях малокомплектной школы ученики были заняты на протяжении урока, им нужно задавать такие задания, где они должны самостоятельно решать без помощи учителя. Для этого и служат геометрические задачи. Такой метод проведения урока облегчает труд учителя и заставляет больше самостоятельно думать и находить выход из различных ситуаций.

Формирование логических структур, управляющих процессом мышления, возникает в результате взаимодействия ребенка со средой. Анализ учебного материала осуществляется главным образом в наглядно-действенном и наглядно-образном плане. Умозаключения их основываются на наглядных предпосылках, данных в восприятии; выводы делаются без опоры на логические аргументы путем прямого соотнесения суждений с воспринимаемыми сведениями. Понятия и обобщения школьников опираются на внешние характеристики предметов и фиксируют лишь те их свойства, которые лежат на поверхности.

Проблема преемственности в изучении геометрического материала

Главным звеном в формировании геометрических понятий в начальных классах является преемственность в изучении материала, т. е. новые знания должны строиться с учетом тех, что были получены в дошкольном возрасте. Первоклассники без труда могут назвать геометрическую фигуру по ее наглядному образу, не принимая во внимание совокупность существенных признаков. В связи с этим нередко возникают ошибки. Например, сравнивая фигуры, учащиеся нередко проводят параллели между их цветом, размером, расположением в пространстве.

Изучение геометрического материала в начальной школе — одна из нерешенных проблем в методике на данный момент. Составители учебников не выделяют геометрический материал в самостоятельный раздел. Он включается в программу на каждом году обучения математике. Связь обычно прослеживается в установлении отношения между числом и геометрической фигурой. То же самое мы видим и в обратном направлении: число используется для изучения свойств некоторых геометрических объектов. На первом году обучения геометрические фигуры используются для присчитывания объектов как счетный материал, составления краткого условия задачи, схем, объясняющих выполнение того или иного арифметического действия и т. д. Все это приводит к тому, что в начальных классах развитие логического мышления детей не

протекает должным образом, что в итоге дает отрицательные результаты динамики индивидуального развития в последующем.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Эсонов М.М. Об основах воспитания математического мышления в общеобразовательной школе на идеях конструктивной геометрии (на методических материалах Узбекистана) // Uzluksiz ta’lim. –Тошкент, 2021. –Maxsus son. –Б.38-41. (13.00.00, №17)
2. Эсонов М.М., Жаров В.К., Геометрия как средство визуализации логики и операционного (функционального) мышления // Международный гуманитарный научный форум. “Гуманитарные чтения РГГУ-2019 “Непрерывность и разрывы: “Социально-гуманитарные измерения””. –М.: Янус-К, 2019, -С. 123-127.
3. Эсонов М.М., Зуннунова Д.Т. Развитие математического мышления на уроках геометрии посредством задач на исследование параметров изображения // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 32. №3. -С. 197-209.
4. Выготский Л. С. Педагогическая психология / Л. С. Выготский. — М.: Педагогика, 1991. — 536 с.
5. Гальперин П. Я. К исследованию интеллектуального развития ребенка // Вопросы психологии, 1969, № 1. — С. 15–25.
6. Леонтьев, А. Н. Деятельность. Сознание. Личность / А. Н. Леонтьев. — М.: Политиздат, 1975. — 312 с.
7. Пиаже, Ж. Избранные психологические труды: Психология интеллекта. Генезис числа у ребенка. Логика и психология / Ж. Пиаже; пер. с франц. — М.: Педагогика, 2001. — 589 с.
8. Рубинштейн, С. Л. Основы общей психологии / С. Л. Рубинштейн. — СПб.: Питер, 2007. — 310 с.
9. Талызина Н. Ф. Теория поэтапного формирования умственных действий и проблемы развития мышления в процессе обучения в школе // Советская педагогика. — 1967, № 1. — С. 28–32.
10. Талызина Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний / Н. Ф. Талызина. — М.: МГУ, 1975. — 343 с.
11. Педагогический словарь: Для студ. высш. и сред. пед. учеб. заведений / сост. Г. М. Коджаспирова, А. Ю. Коджаспиров. — М.: Издательский центр «Академия», 2003. — 176 с.

ГРАФИК МОДЕЛЛАШТИРИШ-МАТНЛИ МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШГА ЎРГАТИШНИНГ САМАРАЛИ УСУЛИ СИФАТИДА.

Эсонов Мунавваржон Мукимжонович[1] Хабибуллаев Исломжон Сойибжон ўғли[2]
[1](PhD) QDU katta o‘qituvchisi,
[2]QDU magistranti
Қўқон давлат университети
https://doi.org/10.5281/zenodo.20644312

Математиканинг ҳар бир тўғри ишланган масаласи инсониятга ақлий лаззат бахш этади (Г. Гессе).

Аннотация. *Мақолада бошланғич синф ўқувчиларига матнли масалаларни ечишни ўргатишда график моделлаштиришдан фойдаланишнинг самарадорлиги ёритилган. Бошланғич таълимда математика фанини ўқитишда матнли масалаларнинг ўрни, моделлаштириш босқичлари ҳамда график моделированинг ўзига хос хусусиятлари таҳлил қилинган. Тажриба-синов ишлари натижалари асосида график моделировани тизимли қўллаш матнли масалаларни ечиш кўникмасини шакллантиришда юқори натижалар бериши асосланган.*

Калит сўзлар: *бошланғич таълим, математика, матнли масалалар, график моделлаштириш.*

Кириш. Ўзбекистон Республикасининг «Таълим тўғрисида»ги Қонуни ҳамда «Бошланғич таълим давлат таълим стандарти» талабларига мувофиқ, бошланғич синфларда математика фанини ўқитишнинг асосий мақсадларидан бири ўқувчиларда матнли масалаларни ечиш кўникмасини шакллантиришдир. Ушбу кўникма нафақат математик саводхонликнинг, балки ўқувчиларнинг аналитик фикрлаш қобилиятининг ҳам муҳим таркибий қисми ҳисобланади.

Матнли масала – бу табиий тилда ифодаланган, компонентларнинг миқдорий характеристикасини бериш ёки улар орасидаги муносабатларни аниқлашни талаб этувчи муайян вазиятнинг тавсифидир. Масалани ечиш жараёни ўқувчиларда қуйидаги тайёргарликни талаб этади:

1) ўқиш кўникмаси;

2) арифметик амалларнинг мазмунини тушуниш («ортиқ», «кам», «фарқ» тушунчалари);

3) таҳлил, синтез, таққослаш, умумлаштириш каби фикрлаш амаллари;

4) кесималар чизиш ва улар устида амалларни намоён қилиш кўникмаси;

5) масала матнини математик тилга ўгириш ҳамда уни предметли ва схематик моделлар кўринишида ифодалаш қобилияти.

Адабиётлар таҳлили ва назарий асослари

Психолого-педагогик адабиётлар таҳлили шуни кўрсатадики, матнли масалаларни ечиш:

- ўқувчиларда мантиқий амалларнинг (таҳлил, синтез, таққослаш, умумлаштириш, абстракциялаш) ривожланишига хизмат қилади;

- моделлаштириш ва белги-символ воситаларидан фойдаланиш кўникмаларини шакллантиради;

- математика фанига ҳамда умуман ўқув жараёнига бўлган қизиқишни оширади;

- мустақиллик ва ўз-ўзини назорат қилиш каби коммуникатив ўқув ҳаракатларини ривожлантиради;

- масала шарти орқали ўқувчиларнинг ахлоқий сифатларини тарбиялайди.

Моделлаштириш умумий илмий маънода «бирор объектнинг хусусиятларини уни ўрганиш учун махсус яратилган бошқа объект – моделда қайта тиклаш» деб тушунилади. Дидактикада моделлаштириш кўргазмали-амалий ўқитиш усули сифатида баҳоланади, бу усул орқали болалар махсус схема ва моделларни тушуниш жараёнида фикрлаш қобилиятини ривожлантиради.

Матнли масалаларни ечиш жараёнида математик моделирование уч босқичи ажратилади:

1. Масала шартини математик тилга ўтказиш – ечиш учун зарур маълумотларни ажратиш ва улар орасидаги боғланишларни математик ифодалаш.

2. Модел ичида ечим топиш – арифметик амалларни бажариш, тенглама ечиш.

3. Интерпретация – олинган натижани масаланинг дастлабки шартига мослаштириш.

График моделлаштириш эса ушбу жараённи сезиларли даражада соддалаштиради. Тўғри тузилган график модел ўқувчига масаланинг шартлари ўртасидаги боғланишларни аниқ кўришга, кўпинча ечимни топишга ва масаланинг турли усулларда ечилишини англашга имкон беради.

Хулоса ва тавсиялар.Тажриба-синов ишлари натижалари график моделлаштириш матнли масалаларни ечишга ўргатишнинг самарали усули эканлигини тасдиқлайди. Бошланғич синф математика дарсларида график моделировани тизимли қўллаш, ўқувчилар томонидан схема ва ёрдамчи чизмалар тузилишини мажбурий талаб сифатида белгилаш, ҳамда қўшимча дидактик материаллар (масалалар тўплами, методик қўлланмалар)дан фойдаланиш матнли масалаларни ечиш кўникмасини шакллантиришга ижобий таъсир кўрсатади.

Ушбу ёндашув ўқувчиларнинг математик саводхонлигини ошириш, уларнинг аналитик ва вариатив фикрлаш қобилиятини ривожлантириш ҳамда кейинги таълим босқичларига тайёргарлик даражасини юксалтириш имконини беради.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Эсонов М.М. О формировании ИПС (информационно-педагогической среды) у младших школьников для восприятия математических понятий // Международный гуманитарный научный форум. «Гуманитарные чтения РГГУ-2019 “Непрерывность и разрывы: “Социально-гуманитарные измерения””. -М.: Янус-К, 2020, -С. 79-83.

2. Эсонов М.М., Расулова Г. Геометрия ўқитиш жараёнида тасвирларни ясаш методини танлаш // Таълим ва касбий маҳорат. Илмий-услубий мақолалар тўплами. –Т. 2015. “Адабиёт учқунлари”. -Б. 232-233.

3. Эсонов М.М Педагогика олий ўқув ютрида геометрияни ўқитишда тасвирлаш методлари муаммоси // Бошланғич таълимни такомиллаштириш истиқболлари: муаммо ва ечимлар. Илмий анжуман материаллари. –Тошкент: ТДПУ, 2013. –Б.116-118.

4. Эсонов М.М. Педагогика олий ўқув юртининг геометрия курсида тасвирлаш методлари дидактик бирликларни йириклаштириш контекстида ўқитишнинг назарий

асослари // Узлуксиз таълим тизимида математика ва информатика фанларини ўқитишни такомиллаштириш масалалари. Республика миқиёсидаги илмий-техник конференция материаллари. –Қўқон. КДПИ, 2012. –Б. 226-227.

5. Ўзбекистон Республикасининг «Таълим тўғрисида»ги Қонуни. – Тошкент, 2020.
6. Бошланғич таълим давлат таълим стандарти. – Тошкент: ЎзР ХТВ, 2021.
7. Жумаев М.Э., Тажибаева Г.С. Бошланғич синфларда математика ўқитиш методикаси. – Тошкент: Фан ва технология, 2019.
8. Нуриддинова М.Н. Матнли масалаларни ечишда моделлаштириш усулидан фойдаланиш // Бошланғич таълим. 2022. №3. – Б. 24–27.
9. Максимова Т.Н. Математикадан матнли масалалар тўплами. 4-синф. – Тошкент: Ўқитувчи, 2021.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ РАЗВИТИЯ ЛОГИЧЕСКИХ УУД МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ (НА ПРИМЕРЕ УЧЕБНИКОВ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ НАЧАЛЬНЫХ КЛАССОВ ШКОЛ УЗБЕКИСТАНА)

Эсонов Мунавваржон Мукимжонович
(PhD) старший преподаватель КГУ
Кокандский государственный университет
E-mail: esonovm@mail.ru
https://doi.org/10.5281/zenodo.20644348

Аннотация. *В статье представлен анализ геометрических заданий, используемых в учебниках математики для начальных классов общеобразовательных школ Узбекистана, направленных на формирование логических универсальных учебных действий младших школьников. Выделены и охарактеризованы основные логические приемы, реализуемые через геометрический материал: сравнение, анализ, синтез, обобщение. Приведены примеры заданий, а также методические рекомендации по их использованию в условиях малокомплектной школы. Материал адресован учителям начальных классов, методистам, студентам педагогических специальностей.*

Ключевые слова: *геометрические задания, логические УУД, начальные классы, младшие школьники, малокомплектная школа, прием сравнения, анализ и синтез, обобщение, школы Узбекистана.*

Введение.

Во многом формированию логического мышления способствуют задания, побуждающие детей к размышлению. Их выполнение должно подкрепляться приемами, связанными с логическими формами мышления. Среди таких выделяют следующие: сравнение, анализ, синтез, обобщение, классификация и т. д.

Опираясь на тему нашего исследования, мы решили выяснить, какие задания геометрического характера, способствующие развитию логических умений школьников, используются в учебниках математики для начальных классов общеобразовательных школ Узбекистана. С точки зрения геометрии курс предполагает формирование у детей пространственных представлений, ознакомление учащихся с основными геометрическими фигурами и некоторыми их свойствами, с простейшими чертежными и измерительными приборами. Геометрический материал предусмотрен программой для каждого класса.

Анализ содержания учебников математики для 1–4 классов (издательство «Ўқитувчи», «Sharq» и др.) позволил нам выявить следующие приемы, связанные с логическими формами мышления.

1. Прием сравнения

Сравнение — это «сопоставление предметов и явлений с целью нахождения сходства и различия между ними» [9, с. 74]. Сравнивая предметы друг с другом, учащиеся приходят к выводу, что с одной стороны эти предметы имеют сходства, с другой —

определенные отличия. Рассмотрим подробно несколько заданий, характерных для учебников математики, используемых в школах Узбекистана.

Задание 1. Сравни фигуры на рисунке. Чем они отличаются? Чем похожи?

Цель данного задания: познакомить учащихся с понятиями круг, четырехугольник, многоугольник.

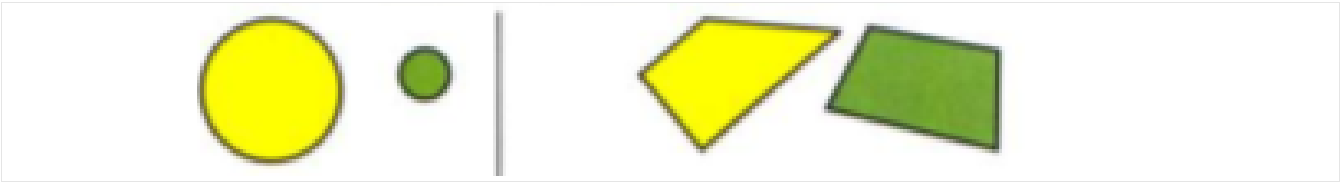


Рис. 1. Задание на знакомство с понятиями.

Важно добиться от учащихся того, чтобы они не ограничивались в сравнении фигур по размеру или цвету. Для этого учитель показывает модель круга и модель четырехугольника, предлагая учащимся прокатить по столу вначале первую фигуру, затем — вторую. Делается вывод, что второй фигуре мешают катиться углы, их много, следовательно, данная фигура называется «многоугольником». Учащиеся самостоятельно подводят итог: «Фигуры справа похожи тем, что у них есть углы — они многоугольники. У фигур слева нет углов, они легко катятся — значит, эти фигуры не являются многоугольниками».

Задание 2. Сколько на чертеже ломаных линий? Сколько многоугольников?

Цель задания: закрепить в сознании учащихся знания о замкнутых и незамкнутых ломаных линиях, многоугольниках.

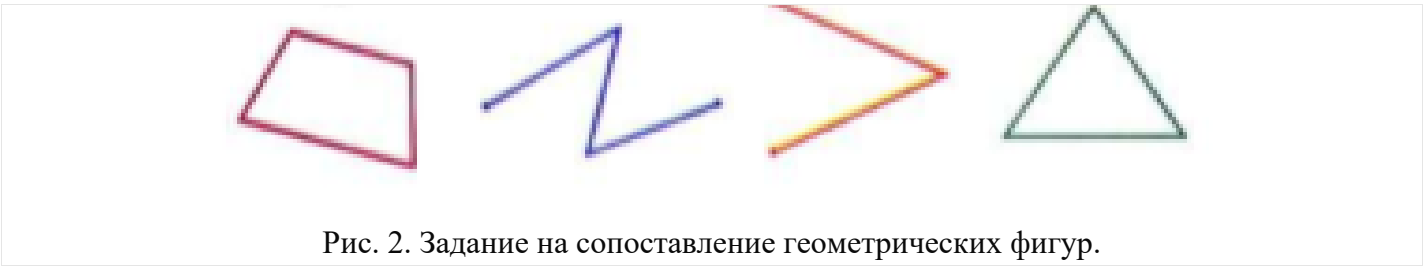


Рис. 2. Задание на сопоставление геометрических фигур.

На практике при решении данного вида задания учитель и учащиеся могут столкнуться со следующим: ученик с уверенностью отнесет некоторые фигуры к многоугольникам, другие — к ломаным, в большинстве случаев забывая о понятии «замкнутая ломаная». Учителю необходимо обратить внимание на то, что замкнутая ломаная образует многоугольник.

Подобная ошибка также может быть допущена при решении такого задания, как, например, сравнить прямоугольник с квадратом и ответить на следующий вопрос: «Как вы думаете, какое понятие шире: прямоугольника или квадрата?».

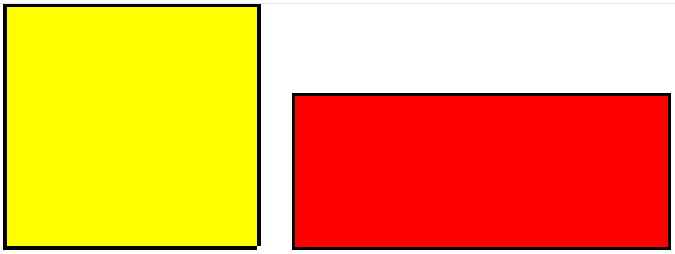


Рис. 3. Сравнение геометрических фигур

На данный вопрос учащиеся могут дать следующие ответы: «Понятие прямоугольника шире, потому что он шире квадрата», «Понятие квадрата шире, потому

что на доске изображенный квадрат больше, чем прямоугольник», «Если мы наложим квадрат на прямоугольник, то увидим, что прямоугольник будет шире». Учитель должен подвести учащихся к правильному выводу: квадрат — это частный случай прямоугольника, поэтому понятие прямоугольника шире.

Помимо разобранных нами заданий, в учебниках математики для начальных классов школ Узбекистана встречаются следующие задания: «Какая фигура пропущена?», «Какие фигуры изображены на чертеже? На какие две группы их можно разбить? Найди разные способы», «Какая фигура лишняя?».

Из данных примеров мы видим, что прием сравнения, в свою очередь, подразделяется на два приема: прием сопоставления и противопоставления. Начиная с первого класса использование этих приемов позволяет учащимся сформулировать понятия (множество треугольников, множество многоугольников, множество отрезков и т. д.). В дальнейшем — представления о свойствах фигур и их классификациях.

2. Приемы анализа и синтеза

Если анализ — «это мысленное расчленение предмета или явления на образующие его части или мысленное выделение в нем отдельных свойств, черт, качеств» [9, с. 14], то в процессе практических действий учащиеся замечают, что в отличие от приема анализа, синтез способствует объединению элементов, дает знание об объекте в целом. В каждом сложном мыслительном процессе эти два приема участвуют в единстве. Совместное их использование дает возможность получения более детальных знаний о геометрическом объекте.

Нами были выявлены следующие задания.

Задание 1. Рассмотри чертежи и объясни, почему одни фигуры являются ломаными линиями, а другие — нет.

Цель задания: закрепить изученные свойства ломаной линии.

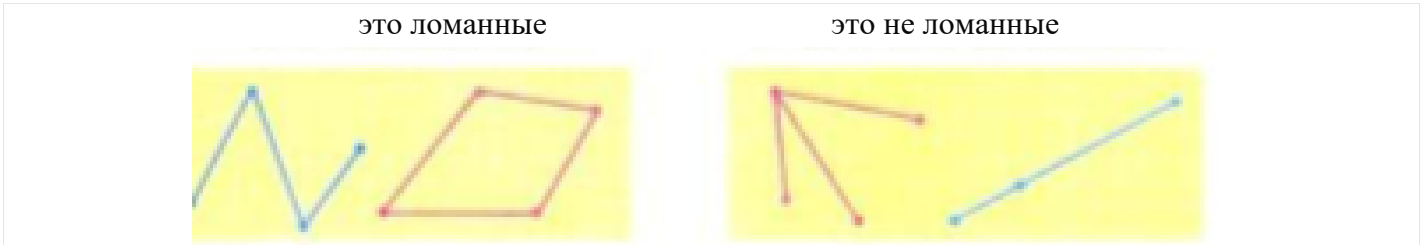


Рис. 4. Закрепление изученных свойств.

Анализируя данные фигуры, учащиеся приходят к следующим выводам: ломаная — это фигура, в которой никакие два соседних звена не лежат на одной прямой; у ломаной линии конец одного отрезка является началом другого. Для того чтобы данное задание способствовало развитию логического мышления школьника, учитель должен позволить учащимся самостоятельно подвести итог. Для этого возможно организовать работу в парах или группах.

Задание 2. Почему каждую фигуру можно назвать лишней?

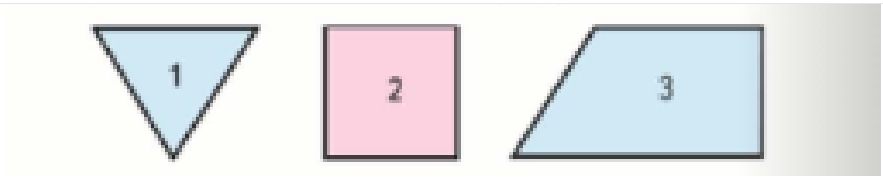


Рис 5. Задание на установление соответствия между фигурами.

Цель задания: устанавливать соответствие между фигурами и их свойствами.

Ответы учащихся на данный вопрос будут варьироваться в зависимости от степени сформированности логического мышления и творческих возможностей учащихся. Ответы могут быть следующими: «Лишняя фигура 1, потому что это треугольник, а остальные фигуры — четырехугольники», «Лишняя фигура 2, потому что у нее все углы прямые», «Лишняя фигура 3, потому что длины ее сторон различны, а в других двух фигурах стороны равны» и т. д. Желательно не допускать ответов: «Лишняя фигура 2, потому что она отлична по цвету». Цель данного задания — закрепление свойств геометрических фигур, поэтому отличие фигур по цветовой гамме — ответ, лежащий на поверхности и не требующий от учащихся глубоких логических рассуждений.

К данным приемам, анализируя содержание учебников, мы отнесли также следующие задания: «Запишите номера всех прямоугольников / квадратов», «Рассмотри рисунок. Выбери высказывания, верные для этого рисунка», «Начерти в тетради такие фигуры. Проведи в каждой фигуре один отрезок так, чтобы стало видно, что все три фигуры имеют одинаковые площади».

3. Прием обобщения

Чаще всего прием обобщения используется при формулировке определений, правил, свойств геометрических фигур. Нередко учащиеся допускают ошибки при использовании обобщения, так как не умеют выделять из общего существенные признаки геометрических объектов.

В учебниках математики для начальных классов школ Узбекистана прослеживаются следующие задания.

Задание 1. Сколько треугольников на чертеже? Сколько квадратов?

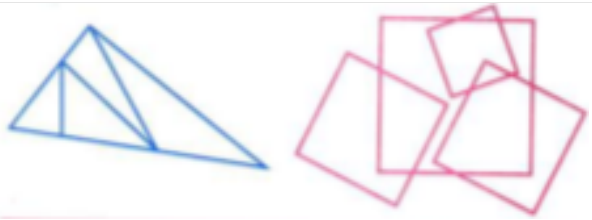


Рис. 6. Задание на обобщение.

Часто учащиеся затрудняются при выполнении подобного задания, сталкиваясь с отличием в изображении фигур от того образа, который сложился у них в дошкольном возрасте.

Например, учащиеся без труда ответят, что первая фигура — квадрат, но допустят ошибку, если изменить положение фигуры в пространстве (повернуть квадрат). Учителю необходимо показать, что квадрат остается квадратом независимо от его расположения.

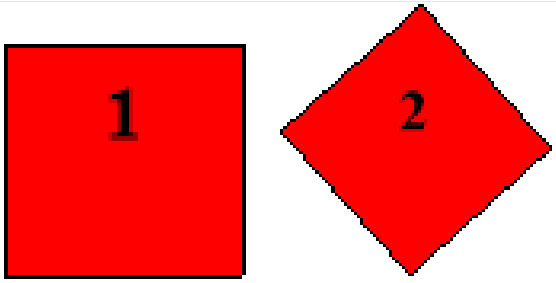
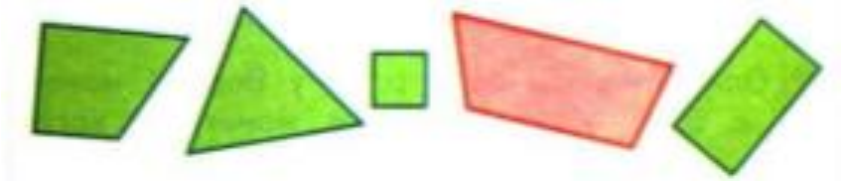


Рис 7. Задание на устранение ошибок

Задание 2. Как можно одним словом назвать все фигуры на чертеже? Какую фигуру можно назвать лишней?

Цель: узнавание математического объекта по заданным признакам.



1 2 3 4 5

Рис. 8. Задание на узнавание геометрической фигуры

Ошибочным будет рассуждение учащихся: «Лишней фигура будет та, которая красная, потому что все остальные многоугольники — зеленые». Для этого учитель может предложить свое задание: «На какие еще группы можно разделить все многоугольники на чертеже». После этого учащимися будет сделан вывод, что одни фигуры — это четырехугольники, другие — треугольники. Затем учитель возвращается ко второму вопросу задания: «Какую фигуру можно назвать лишней?». Исходя из вывода, сделанного учащимися ранее, они подведут следующий итог: «Лишняя фигура — это треугольник, потому что остальные фигуры на чертеже — четырехугольники».

Заключение

На наш взгляд, содержание учебников математики для начальных классов школ Узбекистана и различные методические подходы к реализации заданий способствуют развитию логического мышления младшего школьника, а целенаправленная и систематическая работа учителя на уроках математики по формированию логических умений при использовании приемов сравнения, анализа, синтеза и обобщения способствует развитию интеллекта и творческих способностей учащихся в условиях малокомплектной школы.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Эсонов М.М., Зуннунова Д.Т. Развитие математического мышления на уроках геометрии посредством задач на исследование параметров изображения // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 32. №3. -С. 197-209.
2. Esonov M. M. Training of mathematic students in scientific research methods based on the solution of a complex of geometric problems //American Journal of Advanced Scientific Research (AJASR). USA, 2024.Vol. 1 Issue 3, June – 2024. –Pp. 27-29. (13.00.00, №24)
3. Эсонов М.М. Об основах воспитания математического мышления в общеобразовательной школе на идеях конструктивной геометрии (на методических материалах Узбекистана) // Uzluksiz ta’lim. –Тошкент, 2021. –Maxsus son. –Б.38-41. (13.00.00, №17)
4. Эсонов М.М. Эффективность наглядности при решение геометрических задач // Научный вестник Наманганского государственного университета.–Наманган, 2024. –№4. –С. 28-30. (13.00.00, №30)
5. Эсонов М.М. Особенности нестандартных геометрических задач для развития логического мышления // Научный вестник Бухарского государственного университета.–Бухара, 2024. –№4. –С.7-10. (13.00.00, №23)
6. Бурханова М. А., Асанова З. А. Математика. 1-синф учун дарслик. 1-қисм / — Тошкент: Ўқитувчи, 2020. — 128 б.

7. Бурханова М. А., Асанова З. А. Математика. 1-синф учун дарслик. 2-қисм / — Тошкент: Ўқитувчи, 2020. — 112 б.
8. Жумаев М. Э., Таджиева З. Г. Математика. 2-синф учун дарслик. 1-қисм / — Тошкент: Sharq, 2021. — 96 б.
9. Жумаев М. Э., Таджиева З. Г. Математика. 2-синф учун дарслик. 2-қисм / — Тошкент: Sharq, 2021. — 112 б.
10. Нуриддинова Р. Ш., Абдурахмонова Н. Х. Математика. 3-синф учун дарслик. 1-қисм / — Тошкент: Ўқитувчи, 2022. — 112 б.
11. Нуриддинова Р. Ш., Абдурахмонова Н. Х. Математика. 3-синф учун дарслик. 2-қисм / — Тошкент: Ўқитувчи, 2022. — 112 б.
12. Усмонбоева М. Ж., Абдуллаева Н. А. Математика. 4-синф учун дарслик. 1-қисм / — Тошкент: Sharq, 2023. — 112 б.
13. Усмонбоева М. Ж., Абдуллаева Н. А. Математика. 4-синф учун дарслик. 2-қисм / — Тошкент: Sharq, 2023. — 128 б.
14. Педагогический словарь: Для студ. высш. и сред. пед. учеб. заведений / — М.: Издательский центр «Академия», 2003. — 176 с.

DIFFERENSIAL HISOBNING ASOSIY TEOREMALARI MAVZUSINI O‘QITISHDA “KICHIK GURUHLARDA ISHLASH” METODI

Islomova Naziraxon[1], Muqimova Muazzamxon[2], Keldiyeva Zaynabxon[3]
[1]talaba, Qo‘qonDU, [2]talaba, Qo‘qonDU, [3]talaba, Qo‘qonDU,
https://doi.org/10.5281/zenodo.20644366

Annotatsiya. *Mazkur maqolada matematik analiz fanining muhim bo‘limlaridan biri bo‘lgan “Differensial hisobning asosiy teoremalari” mavzusini o‘qitishda “Kichik guruhlarda ishlash” interfaol metodidan foydalanishning didaktik imkoniyatlari yoritilgan. Talabalarning nazariy bilimlarini mustahkamlash, mantiqiy fikrlashini rivojlantirish, mustaqil va ijodiy faoliyatini faollashtirishda ushbu metodning o‘rni tahlil qilingan. Mashg‘ulot jarayonida talabalarni kichik guruhlarga ajratish, mutaxassislar guruhlarini tashkil etish hamda Ferma, Roll, Lagranj, Koshi teoremalari va Lopital qoidalarini o‘zlashtirishga qaratilgan topshiriqlarni bajarish mexanizmi ko‘rsatib berilgan. Tadqiqot natijalari kichik guruhlarda ishlash metodining talabalar o‘rtasida hamkorlikni kuchaytirishi, bilimlarni samarali o‘zlashtirishga xizmat qilishi va matematik tafakkurni rivojlantirishga ijobiy ta’sir ko‘rsatishini tasdiqlaydi.*

Kalit so‘zlar: *Differensial hisob, asosiy teoremalar, Ferma teoremasi, Roll teoremasi, Lagranj teoremasi, Koshi teoremasi, Lopital qoidasi, matematik analiz, interfaol metodlar, kichik guruhlarda ishlash, amaliy mashg‘ulot, ta’lim texnologiyalari, mantiqiy fikrlash, mustaqil ta’lim, hamkorlikda o‘qitish, pedagogik innovatsiyalar.*

O‘zbekiston Respublikasida zamonaviy bilim va yuksak ma’naviy-axloqiy fazilatlarga ega, mustaqil fikrlaydigan yuqori malakali kadrlar tayyorlash oliy ta’lim texnologiyalariga asoslangan holda ijtimoiy soha va iqtisodiyot tarmoqlarini rivojlantirish oliy ta’limning asosiy maqsadi hisoblanadi. Shu sababli yurtimizda ta’lim sohasiga, ayniqsa matematika faniga katta e’tibor qaratilmoqda. Muhammad al Xorazmiy, Ahmad Farg‘oniy, Mirzo Ulug‘bek, Abu Rayhon Beruniy singari ulug‘ ajdodlarimiz tamal toshini qo‘ygan matematika fani ilm-fan va texnikaning zamonaviy tarmoqlari jadal rivojlanishi munosabati bilan hozirgi kunda yanada katta ahamiyat kasb etmoqda. Axborot-kommunikatsiya texnologiyalari, tibbiyot, biologiya, raqamli iqtisodiyot sohasida va yana ko‘plab sohalarda uning roli katta. Shunday ekan har bir o‘qituvchining asosiy vazifasi o‘quvchi, talabalarga sifatli ta’lim taqdim etish hamda ta’lim sohasining rivojiga hissa qo‘shish hisoblanadi.

Ta’lim o‘qituvchi va talabalar o‘rtasidagi ongli va maqsadga tomon yo‘naltirilgan bilishga doir faoliyat bo‘lib, har qanday ta’limning ikki asosiy maqsadi mavjud.

1) Talabalarga berilgan dastur asosida o‘rganilishi lozim bo‘lgan zarur bilimlarni taqdim etish.

2) Matematik bilimlarni taqdim etish bilan bir qatorda talabalarning mantiqiyfikrlash qobiliyatini shakllantirish.

Ta’lim jarayonidagi ushbu ikki maqsadni amalga oshishi uchun o‘qituvchi har bir o‘rgatayotgan tushunchani psixologik, pedagogik va didaktik qonuniyatlar asosida tushuntirishi lozim.

Biz bu maqolamizda shu ikki maqsadni amalga oshirishni ko‘zlagan holda “Differensial hisobning asosiy teoremalari” mavzusini amaliy mashg‘ulot darsida “Kichik guruhlarda ishlash” metodi yordamida tashkil etishni ko‘rdik.

“Kichik guruhlarda ishlash” metodi - talabalarnbi faollashtirish maqsadida ularni kichik guruhlarga ajratgan holda o‘quv materialini o‘rganish yoki berilgan topshiriqni bajarishga qaratilgan darsdagi ijodiy ish. Ushbu metod qo‘llanilganda ta’lim oluvchi kichik guruhlarda ishlab, darsda faol ishtirok etish huquqiga, boshlovchi rolida bo‘lishga, bir-biridan o‘rganishga va turli nuqtainazarlarni qadrlash imkoniga ega bo‘ladi. “Kichik guruhlarda ishlash” metodi qo‘llanilganda ta’lim beruvchi boshqa interfaol metodlarga qaraganda vaqtni tejash imkoniyatiga ega bo‘ladi. Chunki ta’lim beruvchi bir vaqtning o‘zida barcha ta’lim oluvchilarni mavzuga jalb eta oladi va baholay oladi.

Aytaylik, guruh 30 nafar talabadan iborat. O‘qituvchi talabalarni 6 nafardan 5 ta kichik guruhga bo‘ladi, ya’ni A, B, V, G, D guruhlar. Birinchi guruh A, undagi talabalar A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 ; ikkinchi guruh B, undagi talabalar esa B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6; va hokazo shaklda bo‘linadi.

Har bir talaba o‘zining raqami bo‘yicha asosiy guruhidan, ya’ni harf bo‘yicha o‘quv materialining ma’lum qismi yoki savolini o‘rganish bo‘yicha topshiriq oladi.

A guruhiga “Ferma teoremasi”,

B guruhiga “Roll teoremasi”,

V guruhiga “Lagranj teoremasi”,

G guruhiga “Koshi teoremasi” ,

D guruhiga “Lapital qoidalari” topshiriqlari beriladi.

Material to‘liq o‘zlashtirilishi uchun vaqt beriladi. So‘ngra mutaxassislar guruhida (raqamlar bo‘yicha) barcha 1 yoki 2 va hokazo raqamlar asosida yangi guruh tashkil qilinadi, ya’ni, mutaxassislar guruhi A_1, B_1, V_1, G_1, D_1; ikkinchi guruh A_2, B_2, V_2, G_2, D_2; va hokazo tarzda yangi guruhlar hosil bo‘ladi. Har bir asosiy guruhdan bir hil raqamdagi, lekin harfi turli guruh a’zolari to‘planib, o‘zlariga berilgan savol yoki o‘quv-topshirig‘ini muhokama qiladilar. So‘ngra nazoratchilar guruhi ishtirokchilari o‘zining asosiy guruhiga qaytadilar. Har bir kichik guruhga mavzuga oid tarqatmali materiallardan topshiriqlar tarqatiladi, ularning har birida masala-mashqlar (shunday tanlanishi kerakki, unda barcha amallar qatnashishi shart) beriladi.

Masalan:

1-kichik guruh topshirig‘i:

Roll teoremasi o‘rinli bo‘lishini tekshiring:

1) $f(x)=x^2-3x-4$ funksiya uchun [0;3] kesmada.

2-kichik guruh topshirig‘i:

Roll teoremasi o‘rinli bo‘lishini tekshiring:

1) f (x)=$\sqrt[3]{x^2}-1$ funksiya uchun [-1;1] kesmada.

3-kichik guruh topshirig‘i:

$y=x^2+6x+1$ parabolaning urinmasi A(-1;- 4) va A(3;28) nuqtalarni tutashtiruvchi AB vatarga parallel bo‘lgan nuqtasini toping.

4-kichik guruh topshirig‘i:

arctgx + arcctgx = $\pi/2$, x∈ R *ekanini isbotlang*

5-kichik guruh topshirig‘i: limitni toping.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$$

Barcha guruhlarga tegishli ko‘rsatmalar beriladi, yo‘naltiriladi va topshiriqni bajarish uchun vaqt beriladi. Vaqt tugagach guruhlarning javoblari (chinlik jadvali) taqdim etiladi, muhokama va tahlil qilinadi.

Har bir huruh natijalari tekshiriladi va hato , to‘g‘riligiga adilona baholanadi. Agar biror guruhda xato mavjud bo‘lsa, shu gurux eksperti aniqlanib guruhdan jarima ball ayiriladi va hamma baholanadi.

XULOSA. Guruhni kichik guruhlarga bo‘lib ishlash maqsadga muvofiq, chunki bunda quyidagi ijobiy natijalarga erishish mumkin:

o‘zaro axborot almashinuvi muntazam amalga oshiriladi;

g‘oya va fikrlarni yig‘ish va o‘rtoqlashish ta’minlanadi. Guruhda ishlash individual ishlashga qaraganda yaxshi natija beradi. Bunga sabab sifatida quyidagilarni keltirish mumkin;

guruhda axborot diapazoni keng, chunki, har bir talaba ozmi-ko‘pmi ma’lum axborotga ega;

hamkorlik natijasida guruhdagi faol talabalarning ta’siri tufayli sust talabalarning ham faolligi ortishi mumkin;

ko‘pgina taklif, fikrlar o‘zaro tanqid natijasida saralanadi. Guruh bilan ishlash o‘qitishning ijtimoiy metodi sifatida talabalarning bilimdon bo‘lishiga qaratiladi. Uni mohirlik bilan qo‘llash esa maqsadga erishishga olib keladi. Metodni samarali qo‘llash natijasida quyidagilarga erishish mumkin:

guruh bilan birgalikda ishlash shakllari o‘rganiladi;

talabalarda bir-birlariga bo‘lgan hurmat, ishonch tuyg‘ulari oshadi;

nutq so‘zlash, o‘z fikrini asoslab berish va himoyalanishga bo‘lgan qobiliyati ortadi;

mustaqil fikrlash va muammolarni echishga oid ishtiyoqi shakllanadi;

o‘rganish, ishlashga bo‘lgan ko‘nikma va malakalar hosil bo‘ladi va boshqalar.

Xulosa sifatida yana shuni ta’kidlash mumkinki, «Kichik guruhlarda ishlash» interfaol metodini o‘quv jarayonida yuqorida berilgan tartibda qo‘llay olish uchun guruhlarga ajratilgan qismlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmasligi, ya’ni birinchi qismni o‘zlashtirmay turib, ikkinchi yoki uchinchi qismlarni o‘zlashtira olib bilishi mumkin bo‘lgan mavzular tanlanishi lozim.

Mavzuning o‘zlashtirilishi talabalarda kelgusida ilmiy izlanishlar olib borishlariga yordam beradi. Chunki Differensial hisobning asosiy teoremalari matematik analiz fanining asosiy fundamental bo‘limlaridan biri hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Umarova U.U. “Munosabatlar. Binar munosabatlar” mavzusi bo‘yicha ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlari uchun “Ajurli arra” va “Domino” metodlar // Scientific progress, 2:6 (2021), r. 982-988.

2. Umarova U.U. Mulohazalar ustida mantiqiy amallar mavzusini o‘qitishda «Kichik guruhlarda ishlash» metodi // Scientific progress, 2:6 (2021), p.803-809.

3. Xurramov. Sh.R. Oliy matematika masalalar to‘plami nazorat topshiriqlari I qism. Toshkent – 2015. «Fan va texnologiyalar Markazining bosmaxonasi»

4. X.B.Tadjimatova, O.Ne’matova, N.Islomova. “Aksiomatik nazariya natural sonlar sistemasiga aksiometrik ra’rif” NamDU ILmiy Amaliy Axborotnomasi 2024-11-son 134-135 b.

MAKTABDA MATEMATIKA FANINI O‘QITISHDA CPA MODELINI TATBIQ QILISH.

Jo‘raqulova .I. O.
O‘zbekiston Milliy Unversiteti,Toshkent,O‘zbekiston
https://doi.org/10.5281/zenodo.20644380

KIRISH.

Hozirgi davirda dunyoning eng ilgor davlatlari TIMSS va PISA xalqaro bilimlarni baholash dasturlardan foydalanishadi .Ushbu dasturlar orqali o‘quvchilarning faqat matematikaning nazariy bilimlarini bilish emas, balkida masalalarni tushunish tahlil qilish ,mantiqiy fikirlash va nazariy bilimlarni hayotiy vaziyatlarda qo‘lash kabi tushunchalarni baholash dasturidir.Shu sababli maktablarda o‘quvchilarning mantiqiy salohiyatini oshiruvchi mavzularni kuchaytirish juda muhum hisoblanadi.Matematika fanida mantiqiy fikirlarini shakillantirish uchun matematik mantiq va kombinatorika mavzularning o‘rni alohida ahamiyatga ega.Chunkiy bu mavzular o‘quvchilarni masala shartini to‘g‘ri tushunishga , mantiqiy xulosa chiqarishga , variantlarni tartibi bilan sanashga va o‘z fikrini aniq namoyon etishga xizmat qiladi.

MAQSAD VAVAZIFALAR.

Ushbu ishning maqsadi shundan iboradki O‘zbekiston maktablarida matematik mantiq va kombinatorika mavzularini CPA modeli asosida o‘qitish orqali o‘quvchilarning mantiqiy fikirlarini rivojlantirishga yo‘naltirilgan metodik uslubni joriy etishni taklif kiritishdan iborat. Maqsadga erishish uchun quydagi vazifalar belgilanadi :

1. Singapur ta’lim tizimida CPA modeli hamda spiral tamoyilning o‘rni va samaradorligini o‘rganish;
2. Matematik mantiq va kombinatorika mavzularini boshqa mavzular bilan integratsiyalash orqali o‘qitish usllarini ko‘rsatish;
3. (1-4)sinflarning amaliy misollari yordamida CPA yondashuvining afzalligini tushuntirish.

Singapur bugungi kunda ta’lim sifati bo‘yicha eng yetakchi davlatlaridan biri hisoblanadi. Singapurning ta’lim tizimi doyimiy ravishda TIMSS va PISA kabi xalqaro baholash dasturlari natijalariga ko‘ra dunyodagi eng samarali ta’lim tizimlaridan biri sifatida tan olingan.Singapur maktablarida matematika darslari ko‘pincha CPA modelida olib boriladi.Bu metotik yondashuv orqali o‘quvchilarga mavzuni asta-sekin tushunishga va uni mustahkamlab borishga yordam beradi. Ya’ne mavzularni yodlab emas ,balkida tushunib anglab va har qanday holatlarda qo‘lay olish qobilyatini shakilantiradi.

CPA- modeli 3 bosqichdan iborat.

• Concrete (konkret) bosqich — real predmetlar, modellar va hayotiy vaziyatlar asosida tushuntirish;

• Pictorial (tasviriy) bosqich — rasm, jadval, diagramma va sxemalar orqali mustahkamlash;

• Abstract (abstrakt) bosqich — matematik belgilar, formulalar va mantiqiy ifodalar orqali umumlashtirish.

Singapur matematika darsliklarida mavzular spiral tamoyil asosida tuzilgan bo‘lib, bunda bir mavzu sinfdan sinfga o‘tgan sari soddadan murakkab shakilda izchil rivojlantiriladi.Spral

tamoyil asosida bir mavzuni bir marta emas ,balki bosqichma bosqich o‘qitish orqali mavzuga chuqurroq kirish va mavzuni yaxshiroq tushunishga yordam beradi. Matematik mantiq va kombinatorika mavzulari alohida bo‘lim sifatida emas, balki matematikaning barcha bo‘limlari bilan bog‘langan holda o‘qitiladi.

O‘zbekiston ta’limi uchun integratsiyalashgan model taklifi.

O‘zbekiston ta’lim tizimida ham mantiqiy fikirlarni kuchaytirish uchun matematik mantiq va kombinatorika mavzularini yanayam chuqurlashtirib o‘qitish lozim .Shu maqsadda integratsiyalashgan model taklif etildi .Bu model Singapurdagi CPA yondashuvi bo‘lib bu metod orqali quydagi takliflarni yo‘lga qo‘ysak bo‘ladi.CPA yondashuvining asosi quydagilardan iborat:

• Mavzular spiral tamoyil asosida sinflar kesimida bosqichma-bosqich murakkablashib boradi;

• Nazariy bilimlarni amaliy mashg‘ulotlar bilan bog‘lab o‘rgatiladi;

•Fanlararo integratsiya orqali ona tili, informatika va tabiatshunoslik fanlari bilan mantiqiy bog‘liqliklar kengaytiriladi;

• Baholash jarayonida faqat javob emas, balki o‘quvchining fikrlash qobilyati va asoslash mahorati ham e’tiborga olinadi;

Masala; CPA ta’lim modeliga moslashtirsak. O‘qituvchi masalani konkret ko‘rinishda tushuntiradi bir qog‘ozga o‘rindiqlarga moslab tugma yoki kubiklar joylaydi va 3 ta kichkina o‘yinchoqlarni ketmaketlikda joylab misolni hayotiy shakilda tushintira boshlaydi 3 ta ketmaket o‘yinchoq bir joyga tursa shart bajaraladi yoki aksincha bo‘lsa shart bajarilmaydi.

2.bosqichda o‘quvchilar kitobdagi rasimga qarab ko‘k joylardan ketma-ket joylashgan 3 ta o‘rindiqni topishadi va aylana bilan belgilash orqali shartini bajarishadi bu shart orqali ham ko‘z bilan ko‘rib hamda amaliy tarzda mustaqil bajarishadi.

3.bosqichda esa abstract shaklida endi masala sharti qisqa va matematik ko‘rinishida yoziladi. Ota+Ona+Bola=3 kishi demak 3 ta yonmayon bo‘sh joy bo‘lsa chipta buyurtma beriladi. Masaladan xulosa shuni ko‘rsitadiki agar 3 ta ketma-ket joy mavjud bo‘lsa ,chipda sotib olish mumkun. Ushbu metod orqali mavzularni chuqur o‘quvchilarga tushuntirsak nazariy bilimlarni yodlab emas balkida hayotda qo‘lab,masalan shartini anglab va mantiqi xulosa chiqarish qobilyati shakilanadi.



XULOSA.

Xulosa qilib aytganda, matematik mantiq va kombinatorika mavzularini CPA modeli asosida o‘qitish o‘quvchilarda mantiqiy fikrlashni rivojlantirishga xizmat qiladi. Bu jarayonda o‘quvchi shartni tahlil qilish, asosli xulosa chiqarish, variantlarni tartibli sanash hamda fikrini dalillar bilan izohlashni o‘rganadi. CPA modeli orqali o‘quvchilarnig mantiqiy fikirlash qobilyati yoshlikdan shakillanadi. Boshlang‘ich sinflarda “aga... u holda... ” tipidagi savollarni ko‘paytirish, bir masalani bir nechta usular bilan yechish, variantlar orasida qulayini o‘rgatish va masalalardan

kelib chiqan holda formula yaratish bolalarning mantiqiy fikirlarini rivojlantirishda foydali bo‘ladi. Bu usul orqali o‘quvchilar sabab oqibat munosibatlarni tushunib muammolarni turli yo‘l bilan hal qilish, ko‘nokmasiga ega bo‘ladilar va mantiqiy fikrlash qobilyatlari rivojlanadi. 5–11 sinflarda esa ochiq savollar, muammol masalalar va bahs-munozarali topshiriqlar orqali mavzularni chuqurlashtirish mumkin. Ushbu yondashuv orqali O‘zbekiston ta’lim tizimida matematika fanini o‘qitish samaradorligini oshirishga zamin yaratib beradi. Shuningdek, integratsiyalashgan modelni amaliyotga joriy etish natijasida o‘quvchilarning TIMSS va PISA kabi xalqaro baholash dasturlaridagi natijalari yanada takomillashuvi kutiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Curriculum Planning and Development Division . Primary Mathematics ,Singapore, 1980 yil,
2. Helen Drury.How to Teach Mathematics for Mastery,Oxford University Press,2018 yi .
3. Richard Skemp. Relational Understanding and Instrumental Understanding,Mathematics Teaching jurnalida ,77 soni, 1976 yili.
4. I.V.Repyova.Matematika 1-4 sinf darsliklari,Toshkent,2023 yil

FAZOVIY TAFAKKURNING TUZILISHI VA FAZOVIY TASAVVURLARNI O‘ZGARTIRISH TURLARI

X.Q.Jumaqulov[1], Sh.X.Bekmirzayeva[2]
[1]F.-m. f.-n., dotsent, QDU, [2]Magistrant, QDU
https://doi.org/10.5281/zenodo.20644405

Annotatsiya. *Maqolada fazoviy tafakkurning mohiyati, uning tarkibiy qismlari hamda fazoviy tasavvurlar bilan o‘zgartirish turlari ilmiy-nazariy jihatdan tahlil qilingan. Tadqiqot davomida N.N. Zepnova, G.D. Gleyzer, V. Xaeker, T. Tsigen, I.Ya. Kaplunovich va I.S. Yakimanskaya kabi olimlarning qarashlari o‘rganilib, fazoviy tafakkurning tuzilmasi va rivojlanish bosqichlari yoritilgan. Shuningdek, fazoviy tasavvurlarning dinamiklik, joylashganlik va umumlashganlik kabi asosiy xususiyatlari tavsiflangan. Maqolada fazoviy tasavvurlar bilan o‘zgartirishning uch turi — obyektning joylashuvini o‘zgartirish, tuzilishini o‘zgartirish hamda bir vaqtning o‘zida ham joylashuvi, ham tuzilishini o‘zgartirish jarayonlari tahlil qilingan. Fazoviy tafakkurni rivojlantirishda grafik ko‘rgazmalilik, geometrik modellar va tasavvur faoliyatining ahamiyati asoslab berilgan.*

Kalit so‘zlar: *fazoviy tafakkur, fazoviy obraz, tasavvur faoliyati, geometrik tafakkur, fazoviy tasavvur, grafik ko‘rgazmalilik, fazoviy operatsiyalar, geometriya, obrazlarni o‘zgartirish.*

Abstract. *The article analyzes the essence of spatial thinking, its structural components, and the types of operations performed with spatial images from a scientific and theoretical perspective. The study examines the views of researchers such as N.N. Zepnova, G.D. Gleyzer, V. Haecker, T. Zigen, I.Ya. Kaplunovich, and I.S. Yakimanskaya regarding the structure and development of spatial thinking. The main characteristics of spatial images, including dynamism, location, and generalization, are described. The article identifies three main types of operations with spatial images: changing the position of an object, changing its structure, and simultaneously transforming both its structure and spatial position. The importance of graphic visualization, geometric models, and imaginative activity in the development of students’ spatial thinking is substantiated.*

Keywords: spatial thinking, spatial image, imaginative activity, geometric thinking, spatial representation, graphic visualization, spatial operations, geometry, image transformation.

Аннотация. *В статье рассмотрены сущность пространственного мышления, его структура и виды операций с пространственными образами. В ходе исследования проанализированы научные взгляды Н.Н. Зепновой, Г.Д. Глейзера, В. Хаекера, Т. Цигена, И.Я. Каплуновича и И.С. Якиманской, а также раскрыты структура и этапы развития пространственного мышления. Описаны основные свойства пространственных образов: динамичность, расположенность и обобщённость. В статье выделены три вида операций с пространственными образами: изменение положения объекта, изменение его структуры, а также одновременное изменение структуры и пространственного расположения. Обоснована роль графической наглядности, геометрических моделей и деятельности воображения в развитии пространственного мышления учащихся.*

Ключевые слова: *пространственное мышление, пространственный образ, деятельность воображения, геометрическое мышление, пространственное*

представление, графическая наглядность, пространственные операции, геометрия, преобразование образов.

KIRISH. Fazoviy tafakkur deganda nazariy hamda amaliy masalalarni yechish jarayonida fazoviy tasavvurlarni shakllantirish va ular bilan operatsiyalarni amalga oshirish imkonini beruvchi aqliy faoliyat turi tushuniladi.

Fazoviy tafakkur obrazli tafakkurning bir ko‘rinishi bo‘lib, uning barcha asosiy xususiyatlarini o‘zida mujassamlashtiradi. Shu sababli u tafakkurning so‘zli-diskursiv shakllaridan farq qiladi. Ushbu farq, avvalo, fazoviy tafakkurning obrazlar bilan o‘zgartirishida namoyon bo‘ladi: bunday operatsiyalar jarayonida obrazlar qayta tiklanadi, qayta tuziladi hamda zarur yo‘nalishda o‘zgartiriladi. Mazkur jarayonda obrazlar bir vaqtning o‘zida ham boshlang‘ich material, ham operativ birlik, ham tafakkur jarayonining yakuniy natijasi sifatida namoyon bo‘ladi [8].

Ilmiy adabiyotlarda fazoviy tafakkur tushunchasi turli yondashuvlar asosida talqin etiladi. Ba’zi tadqiqotchilar uni obrazli tafakkurning tarkibiy qismi sifatida qarasalar, boshqalari uni mustaqil kognitiv jarayon sifatida baholaydilar[1].

Fazoviy tasavvurlar bir qator xususiyatlar bilan tavsiflanadi. Ushbu xususiyatlar o‘quvchilarda fazoviy tafakkurni shakllantirishning asosiy yo‘nalishlarini ko‘rsatib beradi. Obrazlar bilan xotira asosida o‘zgartirishga tayangan grafik ko‘rgazmalilik (masalan, masalalarni yechish jarayonida) fazoviy tafakkurning rivojlanishiga xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYASI. Fazoviy tafakkur muammosi bilan shug‘ullangan tadqiqotchi olimlar uning tuzilishini tasavvur faoliyatiga bog‘liq holda tahlil qilganlar. Fazoviy tafakkur tuzilmasini ishlab chiqish bilan N. N. Zepnova, G. D. Gleyzer, V. Xaeker va T. Tsigen kabi olimlar shug‘ullangan.

N. N. Zepnova o‘z ilmiy ishlarida fazoviy tafakkur tuzilmasida quyidagi komponentlarga alohida e’tibor qaratadi [5]:

1. **Ko‘rgazmali yoki abstrakt model asosida fazoviy obrazni yaratish** – obyektning ko‘rgazmali modeli yoki abstrakt tasviri asosida uning fazoviy obrazini shakllantirish.
2. **Yaratilgan obrazni o‘zgartirish va u bilan o‘zgartirish** – yangi masala talablari hamda o‘zgargan sharoitlarga muvofiq holda avval qurilgan obrazni qayta tuzish va undan foydalanish.
3. **Avval yaratilgan umumlashgan obrazlar asosida yangi obrazlarni shakllantirish** – ilgari shakllantirilgan umumiy tasavvurlar asosida yangi fazoviy tasavvurlarni hosil qilish.

V. Xaeker va T. Tsigen fazoviy tafakkurning quyidagi tuzilmasini ajratib ko‘rsatgan bo‘lib, u quyidagi komponentlarni o‘z ichiga oladi [11]:

1. fazoviy figuralar, obrazlar va ularning majmualarini ongli ravishda idrok etish;
2. fazoviy tasavvurlarni eslab qolish (fazoviy tasavvurlar);
3. fazoviy abstraksiyalar (fazoviy obyektlarda umumiy belgilarni ajrata olish qobiliyati);
4. fazoviy kombinatsiyalash (fazoviy obyektlar o‘rtasidagi bog‘lanish va munosabatlarni tushunish hamda ularni mustaqil ravishda aniqlash).

G. D. Gleyzer o‘z tadqiqotlarida shuni ta’kidlaydiki, **o‘rta va yuqori sinflarda geometriyani o‘qitishning muhimligi** shundan iboratki, u o‘quvchilarda intellektning quyidagi

xususiyatlarini rivojlantiradi: geometrik intuitsiya, fazoviy va mantiqiy tafakkur, konstruktiv-geometrik faoliyatga qobiliyat hamda geometriyaning ramziy tilidan foydalanish ko‘nikmasi [4].

U geometriya sohasidagi o‘quvchilarning aqliy faoliyati tuzilmasida “fazoviy komponent”ni ajratib ko‘rsatadi. Olimning fikriga ko‘ra, ushbu komponent quyidagi kichik tarkibiy qismlardan iborat:

1. bir o‘lchovli, ikki o‘lchovli va uch o‘lchovli Evklid tasavvurlari hamda fazoviy abstraksiyalar;
2. tasavvurlarning harakatchanligi va umumlashganligi;
3. fazoda orientatsiya qilish qobiliyati;
4. tasavvurlarning barqarorligi va fazoviy xotira;
5. obrazlarni tanib olish;
6. geometrik obrazlarni tahlil qilish va sintez qilish qobiliyati;
7. fazoviy tasavvur (fazoviy fantaziya);
8. geometriyaning turli bo‘limlari (n-o‘lchovli Evklid, noevklid, vektor, affinniy, proyektiv geometriya), o‘xshashlik va topologik tasavvurlar bilan bog‘liq fazoviy tasavvurlar va boshqalar [4].

Yuqorida keltirilgan fazoviy tafakkur tuzilmalari qiyosiy tahlili shuni ko‘rsatadiki, G. D. Gleyzer tomonidan taklif etilgan tuzilma V. Xaeker va T. Tsigen ishlab chiqqan tuzilma bilan solishtirganda fazoviy tafakkur komponentlarining yanada to‘liqroq ro‘yxatini o‘z ichiga oladi [4].

Fazoviy tafakkurni rivojlantirish muammosini o‘rgangan tadqiqotchi I. Ya. Kaplunovichning fikricha, fazoviy tafakkur tuzilmasi ma’lum bir fikrlash operatsiyalari guruhini (masalan, parallel ko‘chirish, aylantirish, o‘q bo‘yicha simmetriya va boshqalar) o‘z ichiga oladi. Agar inson alohida operatsiyalarni bajarish va quyidagi qobiliyatlarga ega bo‘lsa, ushbu operatsiyalar fazoviy tafakkur tuzilmasining tarkibiy qismi sifatida namoyon bo‘ladi:

1. fazoviy figuralar obrazlari ustida matematik o‘zgartirishlar va ularning kompozitsiyalarini istalgan ketma-ketlikda bajarish;
2. bir nechta o‘zgartirishlar kompozitsiyasini mazkur to‘plamdagi bitta o‘zgartirish bilan almashtirish;
3. to‘g‘ri operatsiyadan teskari operatsiyaga erkin o‘ta olish hamda o‘zgartirish natijasiga ko‘ra dastlabki ma’lumotlarni tiklash [2].

Fazoviy obyektlar obrazlari bilan o‘zgartirish turi fazoviy tasavvurlarning rivojlanish darajasini belgilovchi asosiy ko‘rsatkichlardan biri hisoblanadi [2].

I. S. Yakimanskaya obraz bilan o‘zgartirish turini o‘quvchi uchun yaratilgan obrazni o‘zgartirishning mavjud usuli sifatida talqin qiladi. Uning fikriga ko‘ra, ushbu ko‘rsatkich yordamida tekshiruv vaqtida shakllangan fazoviy tafakkur darajasini aniqlash hamda ta’lim jarayonida uning rivojlanish dinamikasini kuzatish mumkin [12].

NATIJALAR. Fazoviy tasavvurlar bir qator xususiyatlar bilan tavsiflanadi. Ushbu xususiyatlar o‘quvchilarda fazoviy tafakkurni shakllantirishning asosiy yo‘nalishlarini ko‘rsatib beradi. Obrazlar bilan xotira asosida o‘zgartirishga tayangan grafik ko‘rgazmalilik (masalan, masalalarni yechish jarayonida) fazoviy tafakkurning rivojlanishiga xizmat qiladi.

Fazoviy obrazning asosiy xususiyatlari sifatida quyidagilarni ajratib ko‘rsatish mumkin [6]:

Dinamiklik. Bu xususiyat tayanch nuqtalarini ixtiyoriy ravishda o‘zgartira olish, fazoviy obyektning yoki uning elementlarining holatini ixtiyoriy ravishda o‘zgartira bilish qobiliyatida

namoyon bo‘ladi. Geometrik obyekt obrazining dinamikligi – tasvirlarni ko‘chirish, o‘zgartirish va ularni o‘zaro birlashtira olish qobiliyatini anglatadi.

Joylashganlik. Bu obyektning fazoda boshqa obyektlarga nisbatan egallagan o‘rnini ifodalaydi. Obyektning joylashuvini aniqlash deganda uning atrofidagi boshqa obyektlar bilan egallagan o‘rnini ko‘rsatish tushuniladi. Fazoviy munosabatlar obyektning o‘zini hamda uning boshqa obyektlar tizimidagi o‘rnini belgilaydi. Agar obyekt murakkab tuzilishga ega bo‘lsa, ushbu tuzilma ichida ham uning qismlari o‘rtasidagi, qism va butun o‘rtasidagi fazoviy munosabatlar aniqlanadi.

Umumlashganlik. Fazoviy tasavvurlarda ayrim, aniq bir predmetning fazoviy bog‘liqliklari (shakli, o‘lchami, tekislikdagi yoki boshqa obyektlar tizimidagi joylashuvi) bilan bir qatorda, turli xil predmetlarga xos bo‘lgan umumiy xususiyatlar ham aks etishi mumkin.

O‘quv jarayonida eng ko‘p qo‘llaniladigan ko‘rgazmali vositalar quyidagi uchta asosiy guruhga ajratiladi [4]:

1) Natural moddiy modellar – real predmetlar, mulyajlar, geometrik jismlar, turli obyektlarning maketlari, fotosuratlar hamda badiiy reproduksiyalar.

2) Shartli grafik tasvirlar – shakli va mazmuni jihatidan xilma-xil bo‘lgan tasvirlar (chizmalar, aksonometrik va izometrik proyeksiyalarda berilgan ko‘rgazmali tasvirlar, kesimlar, qirqimlar, eskizlar va boshqalar).

3) Belgili modellar – grafiklar, geografik xaritalar, topografik rejalar, diagrammalar, matematik belgilar va boshqa belgili tizimlar.

Mazkur ko‘rgazmalilik turlari obyektning fazoviy xossalari va munosabatlarini ochib berishda bir xil vazifani bajarmaydi. Ular ko‘rgazmali bo‘lishiga qaramay, mazmun jihatidan sezilarli darajada farqlanadi hamda mos fazoviy tasavvurlarning shakllanishi uchun turli sharoitlarni yaratadi.

Tasavvur faoliyati fazoviy tafakkurning asosini tashkil etadi va u ikki darajada amalga oshadi [7]:

1-daraja – obrazni yaratish. Bu faoliyat biror obyekt yordamida fazoviy obrazni shakllantirishga qaratilgan.

2-daraja – obraz bilan o‘zgartirish. Bu bosqichda yaratilgan obrazni qayta ishlash, o‘zgartirish hamda uni tafakkur jarayonida aqliy ravishda transformatsiya qilish amalga oshiriladi.

Idrok jarayonida tasavvur faoliyati elementar shakllarda namoyon bo‘ladi, ya’ni u idrok jarayoniga singib ketgan holda uning maqsadlariga bo‘ysunadi. Boshlang‘ich ko‘rgazmali materialni idrok etish jarayonida obrazni yaratish uchun barcha zaruriy shart-sharoitlar mavjud bo‘ladi, biroq obrazni alohida ravishda shakllantirish zarur. Yaratilgan obraz boshlang‘ich ko‘rgazmali tasvirdan farq qiladi va masalalarni yechish jarayonida o‘zgarishi mumkin.

Bunday holatda tasavvur faoliyati allaqachon yaratilgan obrazlarni o‘zgartirishga yo‘naltiriladi va u idrokka tayanmasdan amalga oshiriladigan murakkab tuzilishga ega bo‘lgan mustaqil aqliy faoliyat — tasavvur jarayoni sifatida namoyon bo‘ladi [10].

Ilmiy adabiyotlarda turli obyektlarning fazoviy tasavvurlarini shakllantirish quyidagi bosqichlar orqali tavsiflanadi:

1. obyektning ko‘rgazmali modelini tahlil qilish va idrok etish;
2. obyekt xususiyatlarini tavsiflash hamda uning obrazini yaratish;
3. yaratilgan obraz bilan operatsiyalarni amalga oshirish;
4. grafik tasvir bilan unga mos keluvchi obyekt o‘rtasidagi o‘zaro bog‘liqlikni anglash;

5. obyektning ikki o‘lchovli tasavvuri bilan uning real grafik tasviri o‘rtasidagi bog‘liqlikni aniqlash [9].

Fazoviy tasavvurlar bilan o‘zgartirish holatlari uchta asosiy turga ajratiladi[12]:

I tur – tasavvur qilinayotgan obyektning faqat **joylashuvini o‘zgartirishga** olib keladigan operatsiyalar.

II tur – obyektning **tuzilishini o‘zgartirishga** olib keladigan operatsiyalar. **III tur** – obyektning **ham joylashuvi, ham tuzilishini o‘zgartirishga** olib keladigan operatsiyalar.

I turdagi operatsiyalar. Operatsiyaning birinchi turi ko‘rgazmali asosga tayangan holda yaratilgan obrazni masala shartiga muvofiq ravishda aqliy jihatdan o‘zgartirishni nazarda tutadi. Bunda faqat fazoviy joylashuvning o‘zgarishi yuz beradi (masalan, obrazni aylantirish, uni bir tekislik doirasida yoki undan tashqarida ko‘chirish).

Bunday o‘zgartirishlar grafik asosda yaratilgan boshlang‘ich obrazning sezilarli darajada o‘zgarishiga olib keladi, biroq uning grafik asosiy ko‘rinishi obyektiv jihatdan o‘zgarmay qoladi. Shuni ta’kidlash kerakki, obrazni aqliy ravishda aylantirish yoki siljitish usullari fazoviy obrazni yaratish jarayonida ham qo‘llaniladi.

Birinchi turga o‘qqa nisbatan simmetriya, markaziy simmetriya, tekislikka nisbatan simmetriya, aylantirish hamda tekislikda va fazoda parallel ko‘chirish jarayonlarida geometrik figuralar obrazlarini qurishga oid masalalar kiradi [2].

II. Operatsiyaning ikkinchi turi - bu vazifaning ta'siri ostida tasvirni asosan tuzilishga aylantirish. Operatsiyaning bu turi asl tasvirning turli xil qoplama, kombinatsiya, qo‘shish, kesish va hokazo usullaridan foydalangan holda uning tarkibiy elementlarini aqliy qayta guruhlash yo‘li bilan o‘zgartirilishi tufayli yuzaga keladi. Ushbu turdagi bilan tasvir tubdan o‘zgaradi va asl tasvirga deyarli o‘xshamaydi.

Yaratilgan tasvirning yangilik darajasi birinchi turdagi operatsiyaga qaraganda yuqori bo‘ladi, chunki tasvir yanada murakkab o‘zgarishlarga uchraydi. Aqliy faoliyat ham ancha yuqori, chunki tasvirning barcha o‘zgarishlari, qoida tariqasida, ongda, tasvirga bevosita tayanmasdan amalga oshiriladi [11].

Operatsiyaning uchinchi turi tasvirni doimiy va qayta-qayta o‘zgartirishni o‘z ichiga oladi. Bu ketma-ket bir-birini almashtiradigan va bir vaqtning o‘zida tuzilishda ham, fazoviy holatda ham asl tasvirni o‘zgartirishga qaratilgan bir qator aqliy harakatlar bilan tavsiflanadi [12].

Fazoviy tasvirlar bilan ishlashning uch turini qiyosiy tahlil qilish shuni ko‘rsatadiki, operatsiya tasvir tuzilishidagi turli elementlarga: uning shakli, holati va ularning kombinatsiyalariga nisbatan amalga oshiriladi. Fazoviy tasvirlar bilan ishlashning barcha aniqlangan turlari fazoviy fikrlashning rivojlanish darajasini tavsiflovchi muhim va juda ishonchli ko‘rsatkichlardan biri hisoblanadi [3].

MUHOKAMA. Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatadiki, fazoviy tafakkur obrazli tafakkurning muhim tarkibiy qismi bo‘lib, u geometrik tushunchalarni anglash, fazoviy obyektlarni idrok etish hamda ular bilan aqliy operatsiyalarni bajarishda asosiy rol o‘ynaydi. Olimlarning ilmiy qarashlari tahlili fazoviy tafakkur ko‘p komponentli murakkab tizim ekanligini tasdiqlaydi. Ayniqsa, G.D. Gleyzer tomonidan taklif etilgan tuzilma fazoviy tasavvur, fazoviy xotira, orientatsiya va geometrik obrazlarni tahlil qilish kabi muhim jihatlarni qamrab olishi bilan ahamiyatlidir.

Maqolada ko‘rib chiqilgan fazoviy tasavvurlar bilan o‘zgartirish turlari o‘quvchilarning fazoviy tafakkur darajasini aniqlashda muhim mezon bo‘lib xizmat qiladi. Birinchi turdagi

operatsiyalar ko‘proq obyektning fazodagi holatini o‘zgartirishga qaratilgan bo‘lsa, ikkinchi va uchinchi turdagi operatsiyalar murakkabroq aqliy faoliyatni talab qiladi. Bu esa stereometriya va geometriya fanlarini o‘qitishda tasavvur faoliyatini rivojlantirishga alohida e’tibor qaratish zarurligini ko‘rsatadi.

Shuningdek, grafik ko‘rgazmali vositalar, modellar va geometrik tasvirlardan foydalanish o‘quvchilarda fazoviy tasavvurlarni shakllantirish va ular bilan ishlash ko‘nikmalarini rivojlantirishda samarali vosita ekanligi aniqlandi. Fazoviy tafakkurni rivojlantirish o‘quvchilarning nafaqat matematik bilimlarini, balki ularning mantiqiy va ijodiy fikrlash qobiliyatlarini ham oshiradi.

XULOSA. Fazoviy tafakkur insonning obrazli va mantiqiy tafakkurini rivojlantiruvchi muhim intellektual faoliyat turi hisoblanadi. Tadqiqot natijalari fazoviy tafakkurning murakkab tuzilishga ega ekanligini hamda u fazoviy tasavvurlarni yaratish, saqlash va o‘zgartirish jarayonlari bilan uzviy bog‘liqligini ko‘rsatdi. Fazoviy tasavvurlar bilan o‘zgartirishning turli shakllari o‘quvchilarning geometrik tafakkurini rivojlantirishda muhim omil bo‘lib xizmat qiladi.

Geometriya va stereometriya fanlarini o‘qitishda grafik ko‘rgazmalilik, geometrik modellar hamda tasavvur faoliyatiga asoslangan metodlardan foydalanish o‘quvchilarning fazoviy tafakkurini samarali rivojlantirish imkonini beradi. Shu sababli ta’lim jarayonida fazoviy tafakkurni shakllantirishga yo‘naltirilgan metodik yondashuvlarni keng qo‘llash muhim ahamiyat kasb etadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. X.Q.Jumaqulov. Sh.X.Bekmirzayeva. “FAZOVIY TAFAKKUR” TUSHUNCHASINI O‘RGANISHGA OID TURLI YONDASHUVLAR. Qo‘qon ilmiy xabarlari. 2026. 98-107-s.
2. Баданова Т.А. Методика формирования пространственного мышления учащихся при изучении геометрии на основе синергетического подхода: дис. ... канд. пед. наук / Татьяна Александровна Баданова. – Калуга, 2009. – 305 л.
3. Батуро В.Я. Применение прикладных задач при изучении математики учащимися технического колледжа / В.Я. Батуро // фізико-математична освіта: науковий журнал. – 2016. – Выпуск 2(8). – С. 17-21.
4. Глейзер Г.Д. Развитие пространственных представлений школьников при обучении геометрии / Г.Д. Глейзер. – М.: Педагогика, 1978.– 104 с.
5. Зепнова Н.Н. Формирование и развитие пространственного мышления учащихся на элективных курсах по геометрии: дис. канд. пед. наук / Н.Н. Зепнова. Иркутск, 2005. – 170 л.
6. Зинченко В.П. Исследование визуального мышления / В.П. Зинченко В.П., В.М. Мануйлов, В.М. Гордон // Вопросы психологии. – 1973. – №2. – С. 3-14.
7. Линькова Н.П. К вопросу о пространственном мышлении. Материалы сборника «Вопросы психологии способностей школьников».– М., 1964.– 167 с.
8. Маклаков А.Г. Общая психология: учебник для вузов / А.Г. Маклаков. – С. – Петербург: Питер, 2016. – 583 с.
9. Устиловская А. А. Психологические механизмы преодоления знаковой натурализации идеального содержания геометрических понятий: дис. ... канд. психол. наук / Алла Алексеевна Устиловская. – М., 2008.
10. Фридман Л. М. Наглядность и моделирование в обучения [Текст]: кн. для учителя / Л. М. Фридман. – М.: Знание, 2016. – 80 с.

11. Шарыгин И.Ф. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень. 10-11 классы: учебник / И.Ф. Шарыгин – 7-е изд.– М.: Дрофа, 2019. – 240 с.
12. Якиманская И.С. Индивидуально-психологические различия в оперировании пространственными отношениями у школьников / И.С. Якиманская // Вопросы психологии. – 1976. – №3. – С. 69-82.

MATEMATIKA O‘QITISHDA O‘QUVCHILARNI TAFAKKURLARINI RIVOJLANTIRISHDA TENGSIZLIKLARNI AHAMIYATI

Mahmudova Ozodaxon Yuldashevna
QDU v.b dotsent
https://doi.org/10.5281/zenodo.20644430

Аннотация. *В статье представлены новые эффективные методы доказательства неравенств и задач в различных математических олимпиадах по их применению. Пособие предназначено для одаренных учащихся общеобразовательных школ, академических лицеев и профессиональных колледжей, учителей математики и студентов педагогических вузов.*

Ключевые слова: *неравенство, теорема Коши, сумма обратных чисел, введение новых переменных, действительные числа, положительные числа*

Abstract. *The article presents new effective methods of proving inequalities and problems in various mathematical Olympiads on their application. The manual is intended for gifted students of general secondary schools, academic lyceums and vocational colleges, teachers of mathematics and students of pedagogical universities.*

Key word: *inequality, Cauchy's theorem, sum of reciprocal inverse numbers, introduction of new variables, real numbers, positive numbers*

Matematika darslarida o‘quvchilar dastlabki darslardanoq mustaqil ravishda xulosa chiqarishga o‘rganadilar. Matematika o‘qituvchisining vazifasi o‘quvchilarda mantiqiy fikrlash qobilyatlarini shakllantirish bilan bir vaqtda ularda matematik qonuniyatlarni o‘rganishga bo‘lgan qiziqishlarini tarbiyalashdan iboratdir. O‘quvchini mantiqiy fikrlashga, izlanishga, ijod qilishga, o‘z navbatida mustaqil ta’lim olishga, o‘z-o‘zini rivojlantirishga tayyorlash maktabning asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi.

Tengsizliklarni isbotlash jarayonida o‘quvchilarga bilim berish bilan birga ularning qobilyatlarini rivojlantirish, mehnatsevarlik, iroda va xarakter kabi fazilatlar, sifatlarni shakllantirishda imkoniyatlari yuqoridir.

Bilimlarni tekshirishda tengsizliklarni isbotlash o‘quvchi tafakkurining rivojlanishi haqida fikr yuritish, kerakli amallarni to‘g‘ri tanlash, hisoblash ko‘nikmalari amallarni to‘g‘ri tanlash, hisoblash ko‘nikmalari haqida fikr yuritish imkonini beradi. Maqolada tengsizliklarni isbotlashning yangi samarali usullari va ularni qo‘llanishiga doir turli matematik olimpiadalardagi masalalar keltirilgan. Qo‘llanma umumiy o‘rta ta’lim maktablari, akademik litseylar va kasb–hunar kollejlarining iqtidorli o‘quvchilari, matematika fani o‘qituvchilari hamda pedagogika oliy o‘quv yurtlari talabalari uchun mo‘ljallangan.

1-misol.

Tengsizliklarni isbotlashda Koshi tengsizligi, o‘zaro teskari sonlar yig‘indisi, yangi o‘zgaruvchi kiritish kabi boshqa turli-xil usullardan foydalanish anchagina ishimizni osonlashtiradi.

Agar a,b,c-haqiqiy sonlar bo‘lsa, quyidagini isbotlang.

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

Isboti:

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+\frac{a+c}{c+b}+\frac{c+b}{a+c}+\frac{b+a}{a+c}+\frac{a+c}{b+a}\geq 2+2+2=6$$

$$\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{a+c}{c+b}\right)+\left(\frac{b+c}{a+b}+\frac{a+c}{b+a}\right)+\left(\frac{c+b}{a+c}+\frac{b+a}{a+c}\right)\geq 6$$

$$\frac{2a}{b+c}+1+\frac{2c}{a+b}+1+\frac{2b}{a+c}+1\geq 6$$

Yoki

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

Bu usulda yechish anchagina oson va qulaydir.

2-misol. Agar a,b,c-haqiqiy sonlar bo‘lsa, quyidagini isbotlang:

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

Isboti: Bizga ma’lumki, ushbu ayirmalar kvadratlari yig‘indisi doimo musbatdir. Ya’ni:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$$

Buni soddalashtirsak,

$$2(a^2+b^2+c^2)\geq 2(ab+bc+ca)\leftrightarrow$$

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

Demak, tengsizlik isbotlandi. Tenglik sharti esa, a=b=c bo‘lganda o‘rinli bo‘ladi.

3-misol. Agar a,b,c-haqiqiy sonlar bo‘lsa, quyidagini isbotlang:

$$a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$$

Isboti: (2)-misolga ko‘ra,

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

Bunga ko‘ra, $a^4+b^4+c^4\geq a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2$

$$(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2\geq(ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab)=abc(a+b+c)$$

4-misol. Agar x,y,z-haqiqiy sonlar bo‘lsa, quyidagini isbotlang:

$$x^4+y^4+4xy+2\geq 0$$

Biz

$$(x^4-2x^2y^2+y^4)+(2x^2y^2+4xy+2)=(x^2-y^2)^2+2(xy+1)^2\geq 0$$

Tengsizlik isbotlandi, x=-1, y=1 yoki x=1, y=-1 bo‘lganda tenglik sharti bajariladi.

5-misol. Agar x,y,z- haqiqiy sonlar, x+y+z=1 bo‘lsa,

$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq 1$ ekanini isbotlang.

Isboti: $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}\right)\geq\sqrt{\frac{xy}{z}\times\frac{yz}{x}}=y$$

Shunga o‘xshash, $\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)\geq z$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)\geq x$$

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq x+y+z=1$$

$\frac{xy}{z}=\frac{yz}{x}=\frac{zx}{y}$ bo‘ladi qachonki, x=y=z bo‘lsagina.

$x+y+z=1$ ekanligidan, x=y=z=$\frac{1}{3}$ bo‘ladi. Demak, tengsizlik isbotlandi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. “Inequalites. Theorems, Techniques and Selected problems” (Zdravko Cvetkovski).
2. www.google.com
3. “Mental Arithmetics Trics” (Andreas Klein).
4. “Secrets of mental math” (Arthur Benjamin and Michael Shermer).

ANIQMAS INTEGRALLARNI HISOBLASHDA VA SONLI QATORLARNI YAQINLASHISHGA TEKSHIRISHDA MATEMATIK INDUKSIYA METODI HAQIDA

B.M.Mamadaliyev[1], M.M.Toxirova[2], Sh.A.Sodiqova[3], S.X.Hazratqulova[4],
[1]fizika-matematika fanlari nomzodi, QDU, mamadaliyevb1960@gmail.com,
[2]Far. vil, O‘zb tum 55-UO‘TM o‘qituvchisi, toxirovamuxtaramxon8@gmail.com
[3]matematika yo‘nalishi talabasi, QDU, sodiqovashahina2007@gmail.com
[4]matematika yo‘nalishi talabasi, QDU, hazratqulova2007@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.20644455

Avvalo bu metod o‘zining juda sodda bo‘lgan g‘oyasi bilan etiborga sazovordir.

Induksiya yordamida biror $A(n)$ gipoteza bayon etilgan bo‘lib, bu gipoteza-mulohaza ixtiyoriy n natural son uchun rostligini isbotlash matematik induksiya metodiga asosan quyidagicha isbotlanadi:

I. $n=1$ da $A(n)$ mulohaza rostligi tekshiriladi;

II. $n=k$ da $A(n)$ mulohaza rost bo‘lsin deb faraz qilinadi;

III. $n=k+1$ uchun $A(n)$ mulohaza rostligini, ya’ni $A(k) \rightarrow A(k+1)$ isbotlanadi. Shundan so‘ng, $A(n)$ mulohaza barcha n lar uchun rost deb hulosa qilinadi.

Matematik induksiya metodi matematikaning turli – tuman, hatto bir – biridan juda olis sohalarida muvaffaqiyat bilan keng qo‘llaniladigan metoddir.

Ushbu maqolada sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishda va aniqmas integrallarni hisoblashda matematik induksiya metodining tadbiqlarini misollar yordamida ko‘rsatishga harakat qilingan.

Ma’lumki, musbat qatorning yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligini bilgan holda, hadlari bir qator hadlari bilan ma’lum munosbatada bo‘lgan (taqqoslangan) ikkinchi musbat qatorning aniqlash mumkin. Ularga oid bir necha teoremalar mavjud. Bu teoremalardan birini keltiramiz.

Teorema. Agar n ning biror $n_0 (n_0 \geq 1)$ qiymatidan boshlab barcha $n \geq n_0$ lar uchun

$a_n \leq b_n$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning yaqinlashuvchi bo‘lishidan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning ham yaqinlashuvchi bo‘lishi yoki $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo‘lishidan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning ham uzoqlashuvchi bo‘lishi kelib chiqadi.

1-misol. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ qatorni yaqinlashishga tekshiramiz.

Barcha $n \geq 1$ lar uchun

$$A(n): \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu tengsizlikni matematik induksiya metodi bilan tekshirish mumkin:

Isboti. I. $n=1$ da $\frac{1}{1!}=\frac{1}{2^{1-1}}$ tenglik o‘rinli.

II. $n=1$ da $\frac{1}{1!}\le\frac{1}{2^{k-1}}$ tenglik deb faraz qilamiz va $n=k+1$ uchun tengsizlikni tekshiramiz:

$$\frac{1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!\cdot(k+1)}\le\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{k+1}\le\frac{1}{2^{k-1}}\cdot\frac{1}{k+1}\le\frac{1}{2^{k-1}}\cdot\frac{1}{1+1}=$$

$$=\frac{1}{2^{k-1}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^k}.$$

Demak, $\frac{1}{(k+1)!}\le\frac{1}{2^k}$ tengsizlik barcha n-lar uchun o‘rinli ekan.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ deb olsak, bu geometrik qator $\left(q=\frac{1}{2}<1\right)$ yaqinlashuvchi. U holda yuqoridagi teoremaga ko‘ra berilgan qator $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ - yaqinlashuvchi.

2-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Matematik induksiya metodi bilan ko‘rsatish mumkinki,

$$A(n):1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\cdot\sqrt{n}\qquad(n\ne1)$$

bo‘ladi.

Bu tengsizlikni isbotlaymiz:

I. $n=1$ da $1<2$ to‘g‘ri.

II. $n=k$ da $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}$ ni to‘g‘ri faraz qilib, $n=k+1$ uchun to‘g‘riligini ko‘rsatamiz.

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\cdot\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}}\le\frac{k+(k+1)+1}{\sqrt{k+1}}=2\sqrt{k+1}.$$

(bu yerda $(\sqrt{k+1}-k)^2=k+1-2\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}+k\ge0$ tengsizlikdan foydalandik).

Demak, $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\le2\sqrt{k+1}$ tengsizlik barcha n-lar o‘rinli ekan.

Agar

$$b_n=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

va

$$a_n=\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

deb olsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

munosabatdan va umumlashgan garmonik qatorning yaqinlashuvchi – uzoqlashuvchi shartiga ko‘ra hamda yuqoridagi teoremaga asosan, berilgan qatorning uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.

Endi aniqmas integrallarni hisoblashda matematik induksiya metodining tatbiqlariga doir misollardan namunalar keltiramiz.

3-misol.

$$A(n): \underbrace{\int\int...\int}_{n} a^x dx = \frac{1}{\ln^n a} a^x + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(n-i)!} x^{n-i}$$

tenglikni isbotlaymiz, bu yerda $c_1, c_2, ..., c_n$ lar haqiqiy sonlar.

Isboti. Bu tenglikni matematik induksiya metodidan foydalanib isbotlaymiz.

I. $n=1$ da $\int a^x dx = \frac{1}{1_n^k} \cdot a^x + c_1$ to‘g‘ri.

II. $n=k$ da $\underbrace{\int\int...\int}_{k} a^x dx = \frac{1}{\ln^n a} a^x + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(k-i)!} x^{n-i}$

tenglikni o‘rinli deb faraz qilib $n=k+1$ uchun tenglikni o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatamiz.

$$\underbrace{\int\int...\int}_{k+1} a^x dx = \underbrace{\int\int...\int}_{k} a^x dx = \int \left(\frac{1}{1_n^{k+1} a} a^x + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(k-i)!} \cdot x^{n-i} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{1_n^n a} \cdot a^x + \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{(k-i)!} \cdot x^{k+1-i} + c_{k+1} =$$

$$= \frac{1}{1_n^{k+1} a} \cdot a^x + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{c_i}{(k+1-i)!} \cdot x^{k+1-i} + c_{k+1} =$$

$$= \frac{1}{1_n^{k+1} a} \cdot a^x + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{c_i}{(k+1-i)!} \cdot x^{k+1-i}.$$

Demak,

$$\underbrace{\int\int...\int}_{k+1} a^x dx = \frac{1}{1_n^{k+1} a} a^x + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(k-i)!} \cdot x^{n-i}$$

tenglik barcha n lar uchun o‘rinlidir.

4-misol. $A(n): \underbrace{\int\int...\int}_{n} \sin x dx = \sin\left(x + n \cdot \frac{3\pi}{2} \right) + \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{(k-i)!} \cdot x^{n-i}$

tenglikni isbotlang, bu yerda $c_1, c_2, ..., c_n$-lar haqiqiy sonlar.

Bu tenglikni ham matematik induksiya metodi orqali isbotlaymiz.

I. $n=1$ da $\int \sin x dx = -\cos + c_1 = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2} \right) + c_1$ to‘g‘ri.

II. $n=k$ da $\underbrace{\int\int...\int}_{k} \sin x dx = \sin\left(x + n \cdot \frac{3\pi}{2} \right) + \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{(k-i)!} \cdot x^{n-i}$ tenglikni to‘g‘ri deb faraz qilib, $n=k+1$ to‘g‘riligini tekshiramiz.

$$\underbrace{\int\int...\int}_{k+1}\sin xdx=\underbrace{\int\int...\int}_{k}\sin xdx=$$

$$=\int\left(\sin\left(x+k\frac{3\pi}{2}\right)+\sum_{i=1}^{k}\frac{c_1}{(k-i)!}\cdot x^{k+1}\right)dx=$$

$$=-\cos\left(x+k\cdot\frac{3\pi}{2}\right)+\sum_{i=1}^{k}\frac{c_1}{(k-i)!}\cdot\frac{1}{k+i+1}x^{k-i+1}+c_{k+1}=$$

$$=\sin\left(x+k\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)+\sum_{i=1}^{k}\frac{c_1}{(k+1-i)!}x^{k-i+1}+c_{k+1}=$$

$$=\sin\left(x+(k+1)\cdot\frac{3\pi}{2}\right)+\sum_{i=1}^{k+1}\frac{c_1}{(k+1-i)!}x^{k-i+1}.$$

Demak, $\underbrace{\int\int...\int}_{k+1}\sin xdx=\sin\left(x+(k+1)\cdot\frac{3\pi}{2}\right)+\sum_{i=1}^{k+1}\frac{c_i}{(k+1-i)!}\cdot x^{k+1-i}$ barcha n lar uchun o‘rinlidir.

Bunday misollarni ko‘plab keltirish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. T.Azlarov., H.Mansurov “Matematik analiz”. Toshkent. 1986-yil.
2. G.Xudoyberganov, A.Voriyev, X.Mansurov, B.Shoimqulov “Matematik analizdan ma’ruzalar”. Toshkent. 2010-yil.
3. T.Azlarov., M.Miraxmedov, D.Otaqo‘ziyev, M.Sobirov, S.To‘laganov. “Matematikadan qo‘llanma”. II. Toshkent. 1990-yil.
4. A.Sa’dullayev, H.Mansurov, G.Xudoyberganov, A.Vorisov, R.G‘ulomov. “Matematik
5. ***M.B.Mamadaliyev, M.X.Qodirova, “sirtning botiq va qabariqligi haqida”*** **Qo‘qon DPI. Ilmiy xabarlar 2024 3-son *PEDAGOGIKA UDK:082.29.63 ORCID:0009-0000-4127-8226***

MATEMATIKA FANINI O‘QITISHNING MUAMMOLARI. MAKTAB MATEMATIKA O‘QUV DASTURIGA BOSHLANG‘ICH IQTISODIY BILIMLARNI INTEGRATSIYASI

Maxsudov Odiljon Xusanovich
Andijon davlat pedagogika instituti v.b.dotsenti
https://doi.org/10.5281/zenodo.20644495

Annotatsiya. *Mazkur maqolada maktab matematika o‘quv dasturiga boshlang‘ich iqtisodiy bilimlarni integratsiya qilish masalalari yoritilgan. Hozirgi globallashuv va bozor iqtisodiyoti sharoitida o‘quvchilarda iqtisodiy tafakkur, moliyaviy savodxonlik hamda kundalik hayotiy vaziyatlarda to‘g‘ri qaror qabul qilish ko‘nikmalarini shakllantirish muhim ahamiyat kasb etadi. Matematika fani iqtisodiy tushunchalarni o‘zlashtirish uchun qulay vosita bo‘lib xizmat qiladi. Foiz, proporsiya, tenglama, funksiyalar va statistik ma’lumotlar yordamida iqtisodiy mazmundagi masalalarni o‘rganish mumkin. Maqolada integratsiyaning pedagogik ahamiyati, metodik yondashuvlari hamda amaliy misollar tahlil qilingan.*

Kalit so‘zlar: *moliyaviy matematika, progressiyalar, hosilalar, integrallar, diskontlash, kreditni qaytarish, konsolidatsiyalangan to‘lovlar, yillik foiz stavkasi.*

Annotation. *The development of the economy of Uzbekistan, its rapid integration into world economic relations, the implementation of economic relations in our society and between our citizens have also changed the scope of application of mathematics. The rapid development of banking, investment and insurance activities, as well as the mathematical modeling of modern market relations and corporate activities have made it necessary for our country to attract specialists in a new field - financial mathematics. Schools, as social institutions, undoubtedly, the formation of new economic structures in our society requires a qualitative improvement in the economic literacy of our people, and especially our youth, and the achievement of a certain level of economic culture by each school graduate.*

Key words: *financial mathematics, progressions, derivatives, integrals, discounting, loan repayment, consolidated payments, annual percentage rate.*

O‘zbekistonning iqtisodiyotini rivojlanishi, uni jahon iqtisodiy aloqalarga jadal kirib borishi, jamiyatimizda va fuqarolarimiz o‘rtasida iqtisodiy munosabatlarni amalga oshishi matematikaning qo‘llanilish doirasini ham o‘zgartirdi. Bank, investitsiya va sug‘urta faoliyatining jadal rivojlanishi, shuningdek, zamonaviy bozor munosabatlari va korporativ faoliyatning matematik modellashtirilishi mamlakatimiz uchun yangi soha - moliyaviy matematika mutaxassislarini jalb qilishni zarur qildi. Maktablar, ijtimoiy institutlar sifatida, shubhasiz, jamiyatimizda yangi-yangi iqtisodiy tuzilmalarning shakllanishi xalqimiz, va ayniqsa, yoshlarimizning iqtisodiy savodxonligini sifat jihatidan yaxshilashni va har bir maktab bitiruvchisi tomonidan ma'lum bir darajadagi iqtisodiy madaniyatga erishishni talab qiladi.

Har bir maktab o‘quvchisi har kuni ommaviy axborot vositalarida turli xil iqtisodiy tushunchalar va atamalar bilan boy bo‘lgan axborot va ma’lumotlar bilan tanishadilar, ularning yetarlicha tushunilishi va amaliy talqini yoshlarimizning aksariyat qismi uchun deyarli mavhum. Chunki, bu ma’lumotlar umumiy ta'lim maktablarining o‘quv jarayonida aks etmaydi, chunki hozirda "Iqtisodiyot" fani asosan oliy o‘quv yurtlarining o‘quv dasturiga kiritilgan.

“Boshlang‘ich sinf matematika darslarida narx, miqdor, qiymat, vaqt, mehnat va tejamkorlik kabi iqtisodiy mazmundagi masalalardan foydalanish o‘quvchilarda iqtisodiy savodxonlikning dastlabki elementlarini shakllantiradi”[6]

“Iqtisodiy nazariyani o‘zlashtirish shunchaki darslikni o‘qishdan ko‘proq narsani talab qiladi. Siz olgan bilimlaringizni muayyan muammolarni hal qilish va real hayotdagi iqtisodiy vaziyatlarni tahlil qilish uchun qo‘llashni o‘rganishingiz kerak”[7]. Hozirgi sharoitda maktab bitiruvchilarida iqtisodiy savodxonlikni rivojlantirish, ularni jamiyatda o‘z o‘rnini topib ketishi muammosining bir yechimi iqtisodiy bilimlarni matematika fani orqali, matematika fani bilan uyg‘un holda olib borish ijobiy natijalar beradi.

Shu bilan birga, "Matematika" fani mavjud asosiy o‘quv dasturidagi boshqa fanlar bilan solishtirganda muhim o‘ziga xos xususiyatlarga ega: bu fan mantiqiy hamda amaliy bilim berish faoliyati bilan bog‘liq bo‘lgani uchun ham o‘quvchilarning iqtisodiy tafakkurini matematik misol va masalalar yordamida rivojlantirish, ularning iqtisodiy bilim va ko‘nikmalarini oshirish maqsadga muvofiqdir.

Xususan, mavjud matematika o‘quv dasturi, hatto boshlang‘ich maktab darajasida ham, zamonaviy bozor iqtisodiyotidagi muhim masalalarni tahlil qilish va hal qilish uchun yetarli. Shuning uchun, matematik va iqtisodiy tayyorgarlikni integratsiyalash ushbu muammoga mos keladigan matematika o‘qitishning metodologik tizimini yaratishni talab qiladi va bu integratsiyaning asosiy qismi iqtisodiy muammolarni matematik modellashtirish bo‘lishi mumkin. Iqtisodiy bilimlarni umumta'lim maktab matematika o‘quv dasturiga kiritish iqtisodiyotning oddiy matematik modellaridan foydalanish orqali amalga oshiriladi, ular o‘quv dasturining tegishli bo‘limining matematik mazmuni o‘zgarishsiz qoladigan, ammo muammo aniq belgilangan iqtisodiy ma'noga ega bo‘ladigan tarzda quriladi. Natijada, "iqtisodiyot-matematika-iqtisodiyot" bog‘liqligi o‘quvchilarga real dunyodagi iqtisodiy muammolarni o‘rganishdan matematik muammolar qanday paydo bo‘lishini va bu muammolarni hal qilish va tekshirishdan qanday iqtisodiy oqibatlar va prognozlar kelib chiqishini namoyish etish imkoniyatini beradi. Matematikani shu bog‘liqlikda o‘rganish o‘quvchilarga matematikaning o‘zini o‘rganish uchun kuchli turtki berishi juda muhim, bu esa “mavhum” matematikaning muhim amaliy ahamiyatga ega ekanligini ko‘rsatish bilan birga o‘quvchilarning matematikaga qiziqishini va natijada uni o‘rganish samaradorligini oshiradi.

Biz, ayniqsa, matematik va iqtisodiy tayyorgarlikni integratsiyalashga bunday yondashuv O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” 4708-qarorida to‘liq mos keladi, bunda, xususan, matematika fanini boshqa fanlar bilan uyg‘unlashtirish, matematika siklidagi fanlarning amaliy yo‘nalishini kuchaytirish maqsadga muvofiqligi belgilangan.

Maktablarda matematika ta'limining hozirgi mazmuni shuni ko‘rsatadiki, matematikani o‘rganish doirasida allaqachon zamonaviy jamiyatdagi har bir inson uchun juda oddiy, ammo muhim bo‘lgan foyda, daromad, xarajat, mehnat unumdorligi, rentabellik, soliqlar, talab-taklif funktsiyalari, tovar bozoridagi muvozanat va nomutanosiblik kabi iqtisodiy tushunchalarni, shuningdek, bank faoliyati bilan bog‘liq murakkabroq tushunchalarni - diskontlash g‘oyasini, kreditni qaytarish muammosini, konsolidatsiyalangan to‘lovlarni, yillik foiz stavkasini tanlashni va boshqalarni ko‘rib chiqish tabiiydir.

[6] M. Jumayev, Z. Tadjiyeva, *Boshlang‘ich sinflarda matematika o‘qitish metodikasi*, T.-Fan va texnologiya, 2005.
[7] Е.В. Савицкая. *Рабочая тетрадь по экономике №1.* М. – Вита-Пресс, 2011. Стр.3

O‘quvchilarning matematik tayyorgarligidan faolroq foydalanish tufayli, bu tushunchalar doirasi umumta'lim maktablarida ijtimoiy-iqtisodiy ta'lim va tarbiyani rivojlantirish uchun tavsiya etiladigan iqtisodiy bilimlarning aniq to‘plamidan tabiiy ravishda kengroq bo‘lib boradi. Shu bilan birga, o‘quvchilarning haqiqiy matematik faoliyati hozirgi holatiga nisbatan sezilarli o‘zgarishlarga duch kelmasligi mumkin, chunki odatda faqat ushbu faoliyatning ob'ektlari o‘zgartiriladi, ularni o‘rganish usullari va texnikalari emas. Xususan, matematikani o‘rganishda iqtisodiy bilimlarni egallash zamonaviy maktab darsliklarida mavjud bo‘lgan ko‘plab muammolar va mashqlarni zamonaviy bozor iqtisodiyotining mazmunli muammolari bilan almashtirish orqali tabiiy ravishda sodir bo‘lishi mumkin. Shunday qilib, matematikaga kelsak, ushbu konsepsiyada ko‘zda tutilgan boshqa maktab fanlarini o‘rganishga iqtisodiy bilimlarni integratsiyalash mumkin.

Boshqacha qilib aytganda, maktab matematika o‘quv dasturida "iqtisodiy komponent" paydo bo‘ladi, bu yangi mazmunli va metodologik yo‘nalishni - iqtisodiy yo‘nalishni shakllantiradi. Uning rivojlanishi davomida o‘quvchilarning matematik tayyorgarligi va iqtisodiy tushunchalarni o‘zlashtirishi bir vaqtning o‘zida, matematika va iqtisodiyot o‘rtasida hech qanday raqobat bo‘lmasdan sodir bo‘ladi. Aytish mumkinki, iqtisodiy tayyorgarlik matematik tayyorgarlikka qo‘shimcha emas, balki tabiiy ravishda ubilan birga rivojlanadi. Ta'lim sohalarini uyg‘unlashuvining bu shakli tabiiy ravishda integratsiya deb atash mumkin va biz bundan buyon bu atamadan foydalanamiz. Iqtisodiy mazmundagi matematik misol va masalalarni yechish o‘quvchida tanqidiy fikrlash qobiliyatini oshiradi. yondashuv orqali

Integratsiya konsepsiyasi doirasida matematika o‘quv dasturining iqtisodiy yo‘nalishi uzluksiz ravishda - boshlang‘ich sinflardan yuqori sinflargacha amalga oshirilishi mumkin. Asosiy arifmetik amallar yosh o‘quvchilarga narx, daromad va foyda kabi asosiy iqtisodiy tushunchalarni o‘zlashtirish imkonini beradi. Manfaat tushunchasi allaqachon 5-6-sinflarda faol qo‘llanilmoqda va 9-11-sinflarda algebra va analiz asoslarining matematik apparati allaqachon iqtisodiy xarakterdagi matematik modellarni qurish va o‘rganish uchun aniq imkoniyatlarni taklif etadi. Iqtisodiy yondashuvni matematika kursiga integratsiyalash konsepsiyasini amalga oshirish matematikani o‘rganishga jamiyatimiz va har bir alohida o‘quvchi mavjud bo‘lgan muhitga bevosita tegishli bo‘lgan aniq mazmun bilan singdirish imkonini beradi. Bu shuningdek, o‘quvchilarni funksiyalar, teskari funksiyalar, tenglamalar va tengsizliklar hamda ularning tizimlari, funksiya grafiklarining o‘zgarishi, progressiyalar, hosilalar, integrallar va boshqalar kabi mavhum matematik tushunchalarni tushunishga undashning kuchli vositasi bo‘lib xizmat qiladi. Masalan, bank tizimini o‘rganish kirish imtihonlarida keng qo‘llaniladigan "parametrli tenglamalar"ni mutlaqo tabiiy ravishda ko‘rib chiqishga olib keladi.

Bundan tashqari, ko‘plab murakkab matematik tushunchalar murakkab foiz tushunchasi asosida tuzilishi va tabiiy ravishda qo‘llab-quvvatlanishi mumkin. Shunday qilib, "foiz" yo‘nalishi - matematika kursining klassik an'anaviy yo‘nalishi, 5-6-sinflarda boshlanadi va hozirda zamonaviy jamiyatda insonning dolzarb kundalik ehtiyojlari bilan (kechiktirilgan to‘lov uchun jarimalarni hisoblash, ish haqi va pensiyalardagi o‘zgarishlarni hisoblash, omonatlar miqdorini hisoblash, banklarda pulni tejash shaklini tanlash, kreditlar uchun to‘lovlarni hisoblash) bog‘liq bo‘lgan didaktik jihatdan juda qimmatli va ob'ektiv ravishda umumta'lim maktabining matematika kursida iqtisodiy yo‘nalishining negizi bo‘lib qoladi.

Iqtisodiy bilimlarni integratsiya qilish jarayoni o‘qitishni differentsiatsiyalash bilan bog‘liq muammolarni ham keltirib chiqaradi. Shuning uchun, amaldagi amaliyotga muvofiq, iqtisodiy va matematik modullar tizimi bilan to‘ldirilgan o‘zgarmas asosni aniqlash zarur. Ushbu modullardan foydalanish ko‘plab o‘ziga xos omillarga, jumladan, sinfning tayyorgarlik

darajasiga, matematika o‘qitishga ajratilgan soatlar soniga, o‘quvchilarning qiziqishlariga va metodik adabiyotlarning mavjudligiga bog‘liq bo‘ladi.

Shunday qilib, iqtisodiy bilimlarni matematika ta'limi tizimiga integratsiya qilish o‘quvchilarga sinf sharoitidagi o‘quv faoliyatidan real hayotdagi amaliy faoliyatga, simulyatsiya qilingan iqtisodiy tizim doirasida qaror qabul qilishdan zamonaviy jamiyat tomonidan yuzaga keladigan muammolarni hal qilishgacha va ushbu qarorlarning oqibatlari uchun mas'uliyatni rivojlantirishgacha, ham yaqin, ham uzoq muddatli o‘rganishga o‘tish imkonini beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” PQ-4708 sonli qarori.
2. M. Jumayev, Z. Tadjiyeva, *Boshlang‘ich sinflarda matematika o‘qitish metodikasi*, T.-Fan va texnologiya, 2005.
3. Azizxo‘jayev N.N. Pedagogik texnologiyalar va pedagogik mahorat. – Toshkent: O‘zbekiston Yozuvchilar uyushmasi Adabiyot jamg‘armasi nashriyoti, 2006.
4. Sariqov E., Xaydarov B. Iqtisodiy bilim asoslari. 9-sinf uchun darslik. Toshkent, - 2019.
5. Савицкая Е.В. Рабочая тетрадь по экономике №1. Москва. – Вита-Пресс, 2011.
6. Савицкая Е.В. Экономика для школьников. – Москва. – Вита-Пресс, 2019.
7. Колягин Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. – Москва: Просвещение, 2017.

SONLARNING BO‘LINISH ALOMATLARINI QURISH USULLARI

Nuritdinov Jalolxon Tursunboy o‘g‘li
Qo‘qon Davlat Universiteti Matematika kafedrasi o‘qituvchisi
Otaboyev Muhsinjon Muqimjonovich
Qo‘qon Davlat Universiteti Matematika kafedrasi mudiri
https://doi.org/10.5281/zenodo.20644520

Annotatsiya. *Ushbu maqola natural sonlar uchun bo‘linish belgilarini tuzishning turli usullarini o‘rganadi va ularning matematik asoslarini tahlil qiladi. Tadqiqot sonlarning o‘nlik yozuviga, modulli arifmetikaga va algebraik o‘zgartirishlarga asoslangan bo‘linish mezonlarini aniqlashning klassik va zamonaviy yondashuvlarini yoritadi. Tub va murakkab sonlar uchun bo‘linish qoidalarini keltirib chiqarishga, shu jumladan ixtiyoriy bo‘luvchilarga qo‘llaniladigan umumlashtirilgan algoritmlarga alohida e’tibor qaratilgan. Shuningdek, maqolada bo‘linish qoidalarining o‘quvchilarda hisoblash tafakkuri va sonlar nazariyasi ko‘nikmalarini rivojlantirishdagi pedagogik ahamiyati muhokama qilinadi. Taklif etilgan usullarning samaradorligini ko‘rsatish uchun bir nechta misollar va isbotlar keltirilgan.*

Kalit so‘zlar: *tub sonlar, sanoq sistemalari, algoritmlar, sonlar nazariyasi*

Bo‘linish qoidalari elementar sonlar nazariyasi va arifmetik hisoblashlarda muhim rol o‘ynaydi. Ular sonning boshqa bir songa to‘liq bo‘linish amalini bajarmasdan turib aniqlashning sodda va samarali usullarini taqdim etadi. Bunday qoidalar uzoq vaqtdan beri matematik ta’lim, og‘zaki hisoblash, kriptografiya va algoritmik masalalarni yechishda qo‘llanilib kelinmoqda. 2, 3, 5, 9 va 11 kabi sonlarga bo‘linishning mashhur mezonlari maktab matematikasida uchraydigan dastlabki nazariy tushunchalardan biri bo‘lib, sonlar nazariyasini chuqurroq o‘rganish uchun asos bo‘lib xizmat qiladi [1, 2].

Bo‘linish qoidalarini tuzish sonlarning o‘rinli yozuvlari va kongruensiyalar nazariyasi bilan chambarchas bog‘liq. Xususan, modulli arifmetika turli butun sonlarga bo‘linish mezonlarini keltirib chiqarish uchun tizimli asos yaratadi. Ko‘pgina klassik qoidalarni sonni o‘nlik shaklda ifodalash va 10 ning darajalarining berilgan bo‘luvchiga nisbatan qoldiqlarini tahlil qilish orqali izohlash mumkin. Bu yondashuv nafaqat mavjud qoidalarni oydinlashtiradi, balki ixtiyoriy sonlar uchun yangi mezonlarni yaratish imkonini ham beradi.

So‘nggi yillarda bo‘linish testlarini yaratishning umumlashtirilgan usullariga e’tibor kuchaygan [3,4]. Tadqiqotchilar hisoblashlarni soddalashtiradigan va klassik mezonlarni kengaytiradigan turli algebraik va algoritmik usullarni taklif qilishgan. Bu usullar nafaqat nazariy matematikada, balki o‘quvchilarga mantiqiy fikrlash va hisoblash ko‘nikmalarini rivojlantirishda yordam beradigan pedagogik amaliyotda ham foydalidir.

Ushbu maqolaning maqsadi natural sonlar uchun bo‘linish qoidalarini tuzish usullarini o‘rganish va modulli arifmetika hamda o‘nlik yozuvlarga asoslangan yagona yondashuvni taqdim etishdir. Maqolada bo‘linish mezonlarini keltirib chiqarishning raqamlarni o‘zgartirish, vaznli raqamlar yig‘indisi va rekursiv qisqartirish usullari kabi bir nechta texnikalari muhokama qilinadi. Olingan qoidalarning to‘g‘riligi va qo‘llanish imkoniyatini ko‘rsatish uchun misollar va isbotlar keltirilgan. Natijalar elementar sonlar nazariyasini o‘qitishga va arifmetik algoritmlar bo‘yicha keyingi tadqiqotlarga hissa qo‘shishi mumkin.

Respublikamiz umumta’lim maktablari va akademik litseylar matematika dasturlarida 2,3,5,9,11 tub sonlariga bo‘linish alomatlari o‘rgatilsada lekin matematikaning “Sonlar nazariyasi” bo‘limida o‘rganiladigan ba’zi bir bo‘linish alomatlari va bu bo‘linish a’lomatlarini keltirib chiqarish, boshqacha aytganda qurish masalalari haqida ma’lumot berilmaydi. Ular hatto universitet yoki pedagogika oliy o‘quv yurtlarining matematika yo‘nalishlarida ham o‘rgatilmaydi. Biz ana shunday bo‘linish a’lomatlari va ularni qurish mezonlari to‘g‘risida to‘xtalib o‘tamiz.

Sonlarning bo‘linish alomatlarini sinflarga quyidagicha ajratish mumkin.

I. Oxirgi raqam bo‘yicha bo‘linish alomatlari:

2 ga bo‘linish alomati: Agar sonning oxirgi raqami nol bo‘lsa yoki ikkiga bo‘linsa, bunday son 2 ga bo‘linadi;

10 ga bo‘linish alomati: Agar sonning oxirgi raqami nol bo‘lsa, bunday son 10 ga bo‘linadi;

5 ga bo‘linish alomati: Agar sonning oxirgi raqami nol yoki besh bo‘lsa, bunday son 5 ga bo‘linadi;

4 ga bo‘linish alomati: Agar sonning oxirgi ikki raqami nol bo‘lsa yoki tortga bo‘linadigan son hosil qilsa, bunday son 4 ga bo‘linadi;

8 ga bo‘linish alomati: Agar sonning oxirgi uchta raqami nol bo‘lsa yoki ular sakkizga bo‘linadigan son hosil qilsa, bunday son 8 ga bo‘linadi;

25 ga bo‘linish alomati: Agar sonning oxirgi ikkita raqami nollar bo‘lsa yoki 25 ga bo‘linadigan son hosil qilsa, bunday son 25 ga bo‘linadi.

II. Sonlarning raqamlar yig‘indisiga ko‘ra bo‘linish alomatlari.

3 ga bo‘linish alomati. Raqamlari yig‘indisi 3 ga bo‘lingan son 3 ga bo‘linadi.

Isbot. $\overline{a_4a_3a_2a_1}$ to‘rt xonali son berilgan bo‘lsin

$$\overline{a_4a_3a_2a_1} = a_1 + 10a_2 + 100a_3 + 1000a_4 = a_1 + (9+1)a_2 + (99+1)a_3 + (999+1)a_4$$

Bu yerda 3 ga bo‘layotganimiz uchun 3 ga karrali koeffitsiyentli hadlarni tashlab yuboramiz. Bundan, agar $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \vdots 3$ bo‘lsa, $\overline{a_4a_3a_2a_1} \vdots 3$ bo‘lishi kelib chiqadi.

11 ga bo‘linish alomati. Toq o‘rindagi raqamlar yig‘indisi va juft o‘rindagi raqamlar yig‘indisining farqi 11 ga bo‘linsa, bunday son 11 ga bo‘linadi.

Isbot. $\overline{a_4a_3a_2a_1}$ to‘rt xonali son berilgan bo‘lsin

$$\overline{a_4a_3a_2a_1} == a_1 + 10a_2 + 100a_3 + 1000a_4 = a_1 + (11-1)a_2 + (99+1)a_3 + (1001-1)a_4$$

Bu yerda 11 ga bo‘layotganimiz uchun 11 ga karrali koeffitsiyentli hadlarni tashlab yuboramiz. Bundan, agar $(a_1 + a_3 - (a_2 + a_4)) \vdots 11$ bo‘lsa, $\overline{a_4a_3a_2a_1} \vdots 11$ bo‘lishi kelib chiqadi.

7, 13, 17, 19, 23, … kabi sonlarning bo‘linish alomatlarini qurishning quyidagi usulini ko‘rsatib o‘tamiz.

Algebra va sonlar nazariyasi kursidan bizga ma’lumki, $(a-b) \vdots m$ bo‘lsa, u holda $a \equiv b \pmod m$ kabi yozish mumkin. Shuningdek taqqoslamalarning quyidagi xossasi ham tegishli darsliklarda keltirilgan.

Tasdiq. Taqqoslamaning har ikkala qismiga m ga karrali sonni qo‘shish va ayirish mumkin[5].

7 ga bo‘linish alomatini qurish. Bizga $\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$ son berilgan bo‘lsin. Bu sonni xona birliklari yig‘indisi ko‘rinishida yozib olamiz

$$\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1} = a_1 + 10a_2 + 100a_3 + 1000a_4 + 10000a_5 + 100000a_6.$$

Bu yig‘indining hadlari uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli.

$$a_1 \equiv a_1 \pmod 7$$
$$10a_2 \equiv 3a_2 \pmod 7$$
$$100a_3 \equiv 2a_3 \pmod 7$$
$$1000a_4 \equiv -a_4 \pmod 7$$
$$10000a_5 \equiv -3a_5 \pmod 7$$
$$100000a_6 \equiv -2a_6 \pmod 7$$

Bundan, agar $(a_1 + 3a_2 + 2a_3 - a_4 - 3a_5 - 2a_6) \vdots 7$ munosabat bajarilsa, berilgan $\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$ son ham 7 ga qoldiqsiz bo‘linishi kelib chiqadi.

13 ga bo‘linish alomatini qurish. . Bizga $\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$ son berilgan bo‘lsin. Bu sonni xona birliklari yig‘indisi ko‘rinishida yozib olamiz

$$\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1} = a_1 + 10a_2 + 100a_3 + 1000a_4 + 10000a_5 + 100000a_6.$$

Bu yig‘indining hadlari uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli.

$$a_1 \equiv a_1 \pmod{13}$$
$$10a_2 \equiv -3a_2 \pmod{13}$$
$$100a_3 \equiv -4a_3 \pmod{13}$$
$$1000a_4 \equiv -a_4 \pmod{13}$$
$$10000a_5 \equiv 3a_5 \pmod{13}$$
$$100000a_6 \equiv 4a_6 \pmod{13}$$

Bundan, agar $(a_1 - 3a_2 - 4a_3 - a_4 + 3a_5 + 4a_6) \vdots 13$ munosabat bajarilsa, berilgan $\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$ son ham 13 ga qoldiqsiz bo‘linishi kelib chiqadi

Misol. 27703 soni 13 ga qoldiqsiz bo‘linishini tekshirish uchun birlar xonasidagi raqamdan boshlab har bir xonadagi raqamlarni mos ravishda 1, -3, -4, -1, 3, 4, … sonlarga ko‘paytirib yig‘indini tekshiramiz.

$$3\cdot1+0\cdot(-3)+7\cdot(-4)+7\cdot(-1)+2\cdot3=-26 \ \vdots\ 13$$

demak 27703 soni 13 ga qoldiqsiz bo‘linadi.

s	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}
7	1	3	2	-1	-3	-2																						
11	1	-1																										
13	1	-3	-4	-1	3	4																						
17	1	-7	-2	-3	4	6	9	5																				
19	1	-9	5	-7	6	3	-8	-4	-2																			
23	1	10	8	11	-5	-4	6	-9	2	-3	-7																	
29	1	10	13	14	-5	8	-7	-12	-4	-11	6	2	-9	-3														
31	1	10	7	8	-13	-6	2	-11	14	-15	5	-12	4	9	-3													
37	1	10	-11																									
41	1	10	18	16	-4																							
43	1	10	14	11	-19	-18	-8	6	17	-2	-20	-15	-21	5	7	-16	12	-9	-4	3	-13							
47	1	10	6	13	-11	-16	-19	-2	-20	-12	21	22	-15	-9	4	-7	-23	5	-2	17	-18	8	-14					
53	1	10	-6	-7	-17	-11	-4	13	24	-25	15	-9	16															
59	1	10	-18	-3	29	-5	9	-28	15	-27	25	14	22	-16	17	-7	-11	8	21	-26	-24	-4	19	13	12	2	20	23
61	1	10	-22	24	-4	21	a	26	17	-13	-8	-19	-7	-9	-29	15	28	-25	-6									
67	1	10	33	-5	17	-31	25	-18	21	9	23	29	22	19	-11	24	-28	-12	14	6	-7	-3	-30	-32	15	16	26	-8
71	1	10	29	6	-11	32	36	5	-21	3	30	16	18	-33	25	-34	15	8	9	19	-23	-17	-28	4	-31	-26	24	27
73	1	10	27	-22	-1	-10	-27	22																				
79	1	10	21	-27	-33	-14	18	22	-17	-12	38	-15	8															
83	1	10	17	4	40	-15	16	-6	23	-19	-24	9	7	-13	36	28	31	-22	29	41	-5	33	-2	-20	-34	-8	3	30
89	1	10	11	21	32	-36	-4	-40	-44	5	-39	-34	16	-18	-2	-20	-22	-42	25	-17	8	-9						
97	1	10	3	30	9	-7	27	-21	-16	34	-48	5	-47	15	-44	45	-35	38	-8	17	-24	-46	25	-41	-22	-26	31	19

Bu usuldan foydalanib boshqa tub sonlar uchun ham bo‘linish alomatlarini qurish mumkin. Quyida biz 100 gacha bo‘lgan tubsonlar uchun sonlar uchun ularning mos xona birliklarini qaysi sonlarga ko‘paytirish kerakligini yuqoridagi jadval orqali keltiramiz.

Ushbu maqolada natural sonlar uchun bo‘linish qoidalarini tuzishning bir qancha usullari o‘rganildi va tizimlashtirildi. Bo‘linish mezonlari ularning tuzilish xususiyatlariga ko‘ra guruhlarga ajratildi, jumladan sonning oxirgi raqamlariga asoslangan qoidalar va uning raqamlari yig‘indisiga asoslangan qoidalar. 2, 3, 4, 5, 8, 10, 11 va 25 sonlariga bo‘linishning klassik testlari o‘nlik yozuv va modulli arifmetika yordamida tahlil qilindi va asoslandi.

7 va 13 kabi tub sonlar uchun bo‘linish qoidalarini tuzishga alohida e’tibor qaratildi. Sonlarni kengaytirilgan o‘nlik shaklda ifodalash va berilgan bo‘luvchiga nisbatan taqqoslamalarni qo‘llash orqali bo‘linishni tekshirishning samarali algoritmlari olindi. Taqdim etilgan yondashuv shuni ko‘rsatadiki, bo‘linish qoidalarini alohida-alohida yodlash o‘rniga tizimli ravishda keltirib chiqarish mumkin. Bundan tashqari, bu usul boshqa tub sonlar uchun umumlashtirilishi va butun sonlarning kengroq sinfiga tatbiq etilishi mumkin.

Kelgusi tadqiqotlarda taklif etilgan usullarni o‘nlik sanoq tizimidan boshqa sanoq tizimlaridagi bo‘linish qoidalariga, shuningdek, kompyuter asosidagi usullar yordamida ixtiyoriy butun sonlar uchun bo‘linish mezonlarini algoritmik yaratishga kengaytirish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Richards, I. (1978). Number Theory. In: Steen, L.A. (eds) Mathematics Today Twelve Informal Essays. Springer, New York, NY.
2. Melvyn B. Nathanson (2025). Combinatorial and Additive Number Theory VII. Springer Cham. CANT, New York, USA. 312p.
3. Akinmoyewa, J. T. Congruence and Divisibility: Divisibility Criteria for Positive Integers. Journal of Natural Sciences Research, Vol. 9, No. 6, 2019
4. Shekatkar, S. M., Ambika, G. Divisibility Patterns of Natural Numbers on a Complex Network. Scientific Reports, Vol. 5, 2015
5. Nazarov, R., Toshpulatov, B., Do‘simbetov, A. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism. Toshkent: O‘qituvchi, 1993.

6. Nuritdinov J., Kakharov S., Tashxodjayev A. Application of Minkowski operator in artificial intelligence tasks //AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing LLC, 2024. – T. 3244. – №. 1. – C. 030016.
7. Nuritdinov J. T. About the Minkowski difference of squares on a plane //Differential Geometry-Dynamical Systems. – 2022. – T. 24.
8. Mamatov M. S. et al. Geometric properties of the Minkowski operator //Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2024. – T. 116. – №. 4. – C. 127-137.

PEDAGOGIK TEXNIKANI SHAKLLANTIRISH YO‘LLARI

Otaboyev Muhsinjon Muqimjonovich
Qo‘qon Davlat Universiteti Matematika kafedrasi mudiri
https://doi.org/10.5281/zenodo.20644534

Pedagogik texnika ta’lim jarayonida muhim rol o‘ynaydi. Zamonaviy ta’lim jarayonida samaradorlikni oshirish va ta’lim sifatini yaxshilash uchun pedagogik texnika keng qo‘llaniladi. Bu tushuncha ta’limning turli aspektlarini qamrab oladi va o‘qituvchi hamda o‘quvchilarning o‘zaro munosabatlaridan tortib, o‘quv materiallarini yetkazish usullari, axborot-kommunikatsiya texnologiyalaridan foydalanishgacha bo‘lgan keng doirani o‘z ichiga oladi. Mazkur referat pedagogik texnikaning mohiyati, komponentlari, afzalliklari va turlari haqida batafsil ma’lumot beradi.

Pedagogik texnika – bu ta’lim jarayonini samarali va samaradorligini oshirishga xizmat qiladigan texnologik, uslubiy va pedagogik vositalar va usullar majmuasidir. Bu texnika ta’lim jarayonini boshqarish va tashkil etishning turli xil usullarini o‘z ichiga oladi, jumladan didaktik, psixologik, kommunikativ va axborot texnologiyalari. Bu usullar va vositalar o‘qituvchi va o‘quvchilar o‘rtasidagi munosabatlarni tartibga solishga yordam beradi, shuningdek, o‘quv jarayonini samarali boshqarishni ta’minlaydi.

Didaktik texnika o‘quv materialini tizimli va izchil tarzda yetkazib berish usullarini o‘z ichiga oladi. Bu usullar o‘quvchilarning bilimlarini samarali o‘zlashtirishini ta’minlashga qaratilgan. Didaktik texnika darsni rejalashtirish, o‘quv materiallarini tanlash va yetkazish usullari, hamda o‘qitish jarayonini baholash kabi elementlarni o‘z ichiga oladi.

Psixologik texnika talabalarning psixologik holatini inobatga olgan holda o‘quv jarayonini boshqarishni o‘z ichiga oladi. Bu usullar o‘quvchilarning individual xususiyatlari, motivatsiyalari va qobiliyatlarini hisobga oladi. Psixologik texnika o‘quvchilarning ta’lim jarayonida faol ishtirok etishini ta’minlashga yordam beradi, ularning qiziqishini oshiradi va stressni kamaytiradi.

Kommunikativ texnika o‘qituvchi va talaba o‘rtasidagi samarali kommunikatsiyani ta’minlash usullarini o‘z ichiga oladi. Bu usullar o‘qituvchining aniq va tushunarli ravishda ma’lumot yetkazishini, o‘quvchilarning savollariga javob berishini, hamda o‘quvchilarning fikrlarini erkin ifoda etishini ta’minlaydi. Kommunikativ texnika o‘quv jarayonining samaradorligini oshiradi va o‘quvchilarning bilimlarini mustahkamlaydi.

Zamonaviy axborot texnologiyalari ta’lim jarayonida keng qo‘llaniladi. Bu texnologiyalar o‘quv materiallarini interaktiv va qiziqarli tarzda yetkazish imkonini beradi. Axborot texnologiyalari yordamida o‘quvchilar internet resurslari, elektron darsliklar, video materiallar va boshqa multimedia vositalaridan foydalanishlari mumkin. Bu texnologiyalar o‘quv jarayonini yanada qiziqarli va samarali qiladi.

Hozirgi zamon pedagogika fani pedagogik mahorat tizimida pedagogik texnikaning roli beqiyos deb qayd etadi. Chunki u o‘qituvchiga o‘z gavdasini tuta bilish (mimika, pantomimika), his-tuyg‘ularini (emotsiyasini) boshqara olish, ishtiyoq, qobiliyatlar, nutq texnikasini egallash va ularni o‘quv faoliyatida, o‘qishdan tashqari ishlar jarayonida qo‘llash yo‘llarini tushuntirishda dasturamal bo‘lib xizmat ko‘rsatadi.

Demak, pedagogik texnika shunday kasbiy va shaxsiy malakalar yig‘indisidirki, u o‘qituvchining pedagogik faoliyatini yo‘lga qo‘yish, o‘quvchi - yoshlarga ta’sir ko‘rsatish, tashkil qilish va boshqarishda asosiy omil bo‘lib xizmat qiladi.

Xo‘sh! O‘qituvchining pedagogik texnikasi deganda nima tushuniladi? O‘qituvchining pedagogik texnikasi qanday malakalardan iborat? U o‘qituvchining o‘quv ishlarini tashkil qilish, amalga oshirish va tarbiyaviy ta’sir ko‘rsatishida qanday rol o‘ynaydi? Ilg‘or va novator pedagoglarning ish tajribalarini kuzatish ilg‘or tajriba maktablari faoliyatini o‘rganish shundan dalolat bermoqdaki, pedagogik texnikani to‘liq egallash, uning malakalarini o‘zida shakllantirish ta’lim – tarbiya samaradorligini oshirishga, o‘quvchi-yoshlar tarbiyalanganligini yuksaltirishga va shu asosda pedagogik mahorat pillapoyalari sari ko‘tarilishga sabab bo‘ladi.

O‘qituvchining pedagogik faoliyat madaniyati tizimida pedagogik mahoratning tarkibiy qismlari pedagogik texnika, pedagogik odob, pedagogik muloqot madaniyatining roli katta ekanligi e’tirof etilgan. Mazkur muammoni ham pedagogik, ham psixologik jihatdan ilmiy – nazariy, uslubiy –tashkiliy hamda amaliy jihatdan tadqiq qilgan Y.P.Gonobolin, N.V.Kuzmina [3], A.N.Sherbakov, V.A.Selastenin [4], L.I.Ruvinskiy [1], V.N.Kuxarev, I.A.Zyazyun [5], N.N. Tarasevich [2], M.G.Davletshin [6], K.Zaripov [7], S.Rajabova, B.Xo‘jaev [8] va boshqalar o‘qituvchining kasbiy tayyorgarligida pedagogik texnikaning muhim ahamiyat kasb etishini alohida e’tibor bilan qayd qiladilar.

L.I.Ruvinskiy o‘qituvchining pedagogik mahorati tizimida pedagogik texnikaning alohida ahamiyatga ega ekanligini qayd qilar ekan, shunday yozadi: “O‘qituvchining pedagogik texnikasi – bu shunday bir malakalar yig‘indisidirki, u pedagogga tarbiyalanuvchilar ko‘rib va eshitib turgan narsalar orqali ularga o‘z fikrlari va qalbini etkazish imkonini beradi” [1].

N.N. Tarasevich esa o‘zining “Pedagogicheskaya texnika - kak element» nomli risolasida pedagogik texnika to‘g‘risida fikr yuritar ekan, shunday deydi: O‘qituvchi faoliyatining ichki va tashqi ko‘rinishlarini izohlaydigan usullar, hissiyotlar, psixik holatlar yig‘indisidan iborat mahorat –pedagogik texnikadir” [2].

Darhaqiqat usta pedagogik topshiriqlarni oliy darajada bajaradigan pedagoglar faoliyatini kuzatish shuni ko‘rsatadiki, o‘quvchilar bilish faoliyatlarini tashkil etish va ularga tarbiyaviy ta’sir ko‘rsatishda pedagogik texnika muhim ahamiyat kasb etadi. Chunki, u o‘qituvchiga o‘z gavdasini tuta bilish his-tuyg‘ulari (emotsiyasi) ni boshqara olish, ishtiyoq, qobiliyatlar, nutq texnikasini egallash va ularni o‘quv faoliyatida, ishlash jarayonida qo‘llash yo‘llarini o‘rgatadi. Shunday qilib, pedagogik texnika ma’lum kasbiy va shaxsiy malakalar yig‘indisidirki, u o‘qituvchining pedagogik faoliyati jarayonida ta’sir ko‘rsatish, o‘quv –tarbiya ishlarini tashkil qilish va boshqarishda etakchi omil bo‘lib xizmat qiladi.

Pedagogik mahorat nazariyasini o‘rganuvchi va tadbiq qiluvchi olimlar (N.N. Tarasevich, N.V. Kuxarev)ning fikrlaricha pedagogik texnika malakalari ikki guruhga bo‘linadi:

Birinchi guruh malakalariga pedagogning nutq texnikasi o‘z hattiharakatini idora qilishi, mimik va pantomimik ifodalari, o‘z hissiyoti, hamda kayfiyatini boshqarishi, aktyorlik va rejissyorlik mahorati kabilar kiradi.

Pedagogik texnikaning ikkinchi guruhidagi malakalari kasb-kor malakalaridan iborat bo‘lib, ularga gnostik malakalar, loyihalovchi malakalar, konstruktiv (jamoaning ijodiy ishlarini tashkil eta olishi, o‘quvchi - talabalarni tarbiyalash, o‘qitishdagi kasb-korlik) malakalari kiradi. Buni 1-jadvalda ko‘rish mumkin:

1-jadval

Pedagogning shaxsiy-kasbiy	**Pedagogning kasbiy malakalari**

malakalari	
1. O‘qituvchining nutq texnikasi 2. O‘qituvchi faoliyatidagi mimik va pantomimik ifodalar 3. O‘qituvchining aktyorlik va rejissyorlik malakalari 4. O‘qituvchining o‘z hissiyotini boshqara olishi	1. Gnostik malakalar: - muhim va asosiy masalani ajratish; - o‘quv materialini tizimlashtirish; - qo‘shimcha manbani aniq belgilash; - mavzuga doir didaktik materialni tanlay olish; - dalillar keltira olish. 2. Loyihalovchi malakalar: - o‘quv ma’lumotini aniq bayon etishni rejalashtira olish; - savol-javob topshiriqlarini to‘g‘ri tuza olish; - izlanish xarakteridagi masalani tuza olish va kuzatish, farazlarni qo‘ya olish. 3. Konstruktiv malakalar: - fikrni mustaqil ifodalashga o‘rgata olish; - javobni asoslash va dalillashga o‘rgata olish; - nazariy va amaliy ma’lumotni bog‘lashga o‘rgata olish.

Jadvalda keltirilgan pedagogik texnikaning malakalari o‘quvchilar o‘quvbiluv faoliyatini tashkil etish va ma’lumotlarni o‘zlashtirishga aniq yo‘llash, topshiriqlarni aniq qo‘llash va nazorat qilish, jamoa va ayrim shaxslar bilan ishchi munosabatda bo‘la olish, savollar qo‘ya bilish, o‘z kayfiyati, hatti-harakati, emotsiyasini boshqara olish kabi usullardan o‘rinli foydalanishda amaliy yordam ko‘rsatishidan dalolat bermoqda. Chunonchi, texnika – usullar yig‘indisi bo‘lgani kabi, pedagogik texnika ham o‘qishni o‘rgatish, ta’sir ko‘rsatish, o‘rganish, munosabat bildirishning ta’lim va tarbiya usullari yig‘indisidir.

Endi, o‘qituvchi pedagogik texnikasi malakalarining qisqacha tavsifnomasi bilan tanishib chiqamiz.

O‘qituvchi pedagogik texnikasining muhim malakalaridan biri uning nutq texnikasi. (Nutq tempi, diksiyasi, (tovushning baland, o‘rta, past qila olishi) nutq tembridir. Ma’lumki, insonlar hayotida nutq katta ahamiyatga ega. Buni barcha biladi va u har bir kishiga aloqa uchun zarur. Nutq kishilarning bir-birlariga ta’sir etishning qudratli vositasi sifatida insonni ishontirishi, mehnatga, g‘alabaga chorlashi, yomon yo‘ldan qaytarishi, quvontirishi yoki jahlini chiqarish va hatto o‘ldirishi ham mumkin. O‘qituvchi faoliyatida ham nutq juda muhim ahamiyat kasb etib, u ta’limiy – tarbiyaviy funksiyalarni bajaradi.

O‘quvchilar o‘qituvchi nutqi orqali bilim, fikr, ishonchga ega bo‘ladilar. Muayyan his – tuyg‘ularni tushunib, o‘z faoliyatlarini shu nutqda bayon ettirganlari asosida tashkil etadilar. Nutqning fiziologik asoslari I.P.Pavlov tomonidan izohlab berilganligi sababli ham biz sezgilarimiz, idrokimiz va tasavvurimizni atrofimizdagi tashqi dunyoning birinchi signallari deb bilamiz; nutq va tafakkur esa, ikkinchi signal sistemasini tashkil etadi. So‘z voqelikdagi narsa va hodisalarni idrok qilish, ular to‘g‘risida tasavvurlar hosil qilishdan iborat bo‘lgan bevosita signallarning signalidir. “Insonda, - deb yozadi I.P.Pavlov, - talaffuz etiladigan, eshitiladigan va ko‘rinadigan so‘z sifatida ikkinchi darajali signallar paydo bo‘ldi, taraqqiy etdi va takomillashdi. Bu yangi signallar sistemasi borib-borib insonlar tashqi va o‘z ichki dunyosidan bevosita qabul qiladigan, butun taassurotlarni belgilaydigan bo‘lib qoldi...”

Bilamizki, o‘zgalarga qaratilgan nutq og‘zaki va yozma bo‘lishi mumkin. Nutqning bu ikkala ko‘rinishi bir-biriga uzviy bog‘liq bo‘lib, biri ikkinchisini to‘ldiradi. Ba’zan og‘zaki nutqni yaxshi o‘zlashtira olgan odam o‘z fikrini yozma nutqda yomon bayon etishi yoki aksincha yozma nutqni yaxshi egallagan odam fikrini og‘zaki nutqda aniq bayon eta olmasligi ham mumkin. O‘qituvchining nutqi o‘quvchilarga ma’lumotlarni qanday tarzda o‘rgatishi bilan xarakterlanadi, shuning uchun u boshqa nutqlar kabi tuzilavermaydi. Ammo, faqat pedagogga xos nutqgina muayyan belgilarga ega bo‘lishi mumkin. Shuning uchun ham har bir odam nutqining o‘ziga xos xususiyatlari bo‘ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Ruvinsky L.I., Aret A.Ya. Self-education of schoolchildren. In Russian /Ruvinskiy L.I., Aret A.Ya. Samovospitanie shkolnikov. M. Pedagogy, 1976. 160 p.
2. Tarasevich, N. N. (1985). *Pedagogicheskaya texnika kak element pedagogicheskogo masterstva*. Moscow, Russia: Pedagogika.
3. Kuzmina, N. V. (1990). *Professionalizm lichnosti prepodavatelya i mastera proizvodstvennogo obucheniya*. Moscow, Russia: Vysshaya shkola.
4. Slastenin, V. A. (2002). *Pedagogika*. Moscow, Russia: Akademiya.
5. Zyazyun, I. A. (1989). *Osnovy pedagogicheskogo masterstva*. Moscow, Russia: Prosveshcheniye.
6. Davletshin, M. G. (2005). *Pedagogik mahorat asoslari*. Tashkent, Uzbekistan: O‘qituvchi.
7. Zaripov, K. (2001). *O‘qituvchi mahorati*. Tashkent, Uzbekistan: Fan.
8. Xo‘jaev, B. (2010). *Pedagogik texnologiyalar va pedagogik mahorat*. Tashkent, Uzbekistan.
9. Mamatov, M. S., Nuritdinov, J. T., Turakulov, K. S., & Mamazhonov, S. M. (2024). Geometric properties of the Minkowski operator. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 116(4), 127-137.
10. Nuritdinov, J. T. (2022). About the Minkowski difference of squares on a plane. Differential Geometry-Dynamical Systems, 24.

BO‘LAJAK MATEMATIKA O‘QITUVCHILARINI TAYYORLASHDA DESMOS RAQAMLI TEXNOLOGIYASIDAN FOYDALANISHNING METODIK ASOSLARI

Turdaliyeva Dildora Roziqjon qizi

https://doi.org/10.5281/zenodo.20644553

Annotatsiya: *Bo‘lajak matematika o‘qituvchilarini tayyorlash zamonaviy ta'limda juda muhim vazifadir. Raqamli texnologiyalar misli ko‘rilmagan tezlikda rivojlanayotganligi sababli, o‘qituvchilar uchun o‘qitish va o‘quv jarayonlari sifatini sezilarli darajada yaxshilaydigan zamonaviy vositalarni o‘zlashtirish zarurati ortib bormoqda. Bunday texnologik yangiliklardan biri Desmos bo‘lib, u matematik tushunchalarni vizualizatsiya qilish, tushunish va muloqot qilish usulini o‘zgartiruvchi interaktiv raqamli matematika platformasidir. Ushbu maqolada Desmosni matematika o‘qituvchilari uchun o‘quv dasturlariga samarali integratsiyalashning uslubiy asoslari va pedagogik strategiyalari o‘rganiladi. Unda Desmosning matematik tushunchani chuqurlashtirish, talabalarning faolligini oshirish va ijodiy muammolarni hal qilish qobiliyatini rivojlantirishdagi salohiyati ko‘rib chiqiladi. Maqolada mazmunni bilish, pedagogik strategiyalar va texnologik malakaga e'tibor qaratgan holda, Desmosni bo‘lajak matematika o‘qituvchilarini rivojlantirishda tizimli va samarali qo‘llash yondashuvlari bayon etilgan. Maqolada hayotiy misollar, texnologiyani rivojlantirgan ta'limdan kutilgan natijalar muhokama qilinadi va muammolar va kelajak istiqbollari haqida to‘liq fikr yuritiladi.*

Kalit so‘zlar: *Desmos, matematik ta'lim, raqamli texnologiyalar, o‘qituvchilar tayyorlash, interfaol ta'lim, matematik vizualizatsiya, pedagogik integratsiya.*

Matematika tabiiy va amaliy fanlarning asosi bo‘lib, o‘quvchilarning kognitiv asoslarini shakllantiradi va ularning tahliliy va ijodiy fikrlash ko‘nikmalarini rivojlantirish imkonini beradi. Zamonaviy davrda fanning ko‘lami va murakkabligi o‘quvchilarning yangi avlodlari ehtiyojlariga mos keladigan innovatsion o‘qitish usullarini talab qiladi. Matematika ta'limida texnologiyadan foydalanish shunchaki qo‘shimcha vosita emas, balki butun ta'lim tajribasini qayta belgilaydigan o‘zgartiruvchi kuchdir. Mavjud raqamli resurslar orasida Desmos interaktiv, veb-ga asoslangan matematika platformasi sifatida ajralib turadi, u turli darajadagi matematik tushunchalarni o‘rganish, vizualizatsiya qilish va ular bilan shug‘ullanishni rag‘batlantiradi. Desmos o‘zining intuitiv interfeysi, dinamik grafik imkoniyatlari, real vaqtda fikr-mulohaza xususiyatlari va interaktiv vazifalarni yaratishdagi moslashuvchanligi bilan tezda xalqaro e'tirofga sazovor bo‘ldi. Bu mavhum matematik nazariyalar va kundalik ilovalar o‘rtasidagi tafovutni bartaraf etishda ayniqsa kuchli. Shuning uchun bo‘lajak matematika o‘qituvchilarini Desmosdan samarali foydalanishga o‘rgatish maktablarda matematika ta'limining dolzarbligi, qulayligi va samaradorligini ta'minlash uchun juda muhimdir [1].

Desmosni integratsiyalashning uslubiy asosi platforma xususiyatlarini chuqur tushunishdan boshlanadi. Desmos kuchli grafik yordam dasturlari, interaktiv slayderlar, moslashtirilgan faoliyat va algebra, hisob, geometriya va statistika kabi turli sohalarni qamrab oluvchi ko‘plab oldindan tayyorlangan matematik stsenariylarni taqdim etadi. Desmos-ning asosiy afzalligi uning matematik ob'ektlarni dinamik tarzda ifodalashidir, bu esa talabalarga parametrlar bilan tajriba o‘tkazish, tezkor o‘zgarishlarni kuzatish va shu orqali mustahkam kontseptual asoslarni yaratish imkonini beradi. Kelajakdagi matematika o‘qituvchilari nafaqat

ushbu xususiyatlardan foydalanishda, balki Desmosning matematik izlanishlarni rivojlantirish uchun noyob imkoniyatlaridan foydalanadigan dars rejalarini tuzishda ham mohir bo‘lishlari kerak.Shuning uchun o‘qituvchilarni tayyorlash Desmos bilan bir necha bosqichda shug‘ullanishni o‘z ichiga olishi kerak. Asosiy bosqichda tinglovchilar asosiy navigatsiya, grafiklarni qurish va matematik ob'ektlarni o‘zgartirish bilan tanishadilar. Ushbu dastlabki bosqich texnologik ravonlikni rivojlantirishga va raqamli muhitda ishonchni mustahkamlashga qaratilgan. Talabalar o‘sib borishi bilan asosiy e'tibor asta-sekin Desmosning pedagogik qo‘llanilishiga qaratiladi. Ular sinfdagi turli stsenariylarni tahlil qiladilar - yangi tushunchalarni joriy etishdan tortib, muammoli o‘rganishni rag‘batlantirishgacha - va Desmosdan interaktiv vizualizatsiya, hamkorlikda mashqlar va tabaqalashtirilgan ko‘rsatmalarni yaratishda qanday foydalanish mumkinligini o‘rganadilar. Bu jarayonning markazida matematikadan samarali ta'limning asosi bo‘lgan faol o‘rganish tushunchasi turadi. Desmos o‘quvchilarga o‘zgaruvchilarni manipulyatsiya qilish, naqshlarni kuzatish va real vaqt rejimida vizual fikr-mulohazalar asosida farazlarni shakllantirish imkonini berish orqali faol, talabaga yo‘naltirilgan yondashuvni osonlashtiradi. Bu konstruktivistik ta’lim nazariyalariga mos keladi, bunda bilim passiv qabul qilishdan ko‘ra, o‘quvchilar tomonidan faol ravishda shakllantiriladi. Bo‘lajak o‘qituvchilar uchun talabalarga tergov o‘rganish epizodlarini boshqarishda, matematik munozaralarni osonlashtirishda va bir nechta yechim yo‘llarini faol o‘rganishga undashda zarur bo‘lgan ko‘nikmalarni rivojlantirish juda muhimdir [2].

Desmos tomonidan qo‘llab-quvvatlanadigan pedagogik strategiyalar grafik vositalarni oddiy namoyish qilishdan tashqariga chiqadi. Talabalarga o‘qituvchilar o‘quvchilarni natijalarni bashorat qilishga, grafik ma'lumotlarni tahlil qilishga va o‘z fikrlarini asoslashga undaydigan interaktiv mashg‘ulotlarni yaratishga da'vat etiladi. Masalan, Desmos dasturida slayderlar yordamida funksiya o‘zgarishlarini dinamik ravishda o‘rganish mumkin, bu esa o‘quvchilarga mavhum algebraik munosabatlarni yorqin tushunishga yordam beradi. Desmosning vizual va eksperimental tabiati simmetriya, davriylik, uzluksizlik va o‘zgarish tezligi kabi tushunchalarni mustahkamlashga yordam beradi - bu mavzular ko‘pincha o‘quvchilar uchun an'anaviy usullar orqali tushunish qiyin bo‘ladi. Yana bir muhim uslubiy jihat - shakllantiruvchi baholash uchun Desmosdan foydalanish. Platforma o‘qituvchilarga o‘quvchilarning ishini real vaqt rejimida kuzatish, tezkor fikr-mulohazalar va tabaqalashtirilgan yordam ko‘rsatish imkonini beradi. Desmos-da nazorat punktlari, ochiq savollar va mulohaza savollarini o‘z ichiga olgan tadbirlarni loyihalash orqali bo‘lajak o‘qituvchilar inklyuziv va sezgir sinf muhitini yaratishi mumkin. Bu qobiliyat nafaqat o‘quvchilarning motivatsiyasi va o‘z-o‘zini samaradorligini oshiradi, balki dalillar va fikr-mulohazalarga asoslangan doimiy takomillashtirish madaniyatini ham rivojlantiradi. Kelajakdagi matematika o‘qituvchilarini tayyorlash jarayoni ta'limda texnologiyadan foydalanish bilan bog‘liq axloqiy va kasbiy mas'uliyatni ham qamrab olishi kerak. Bunga ma’lumotlar maxfiyligini tushunish, raqamli kontentdan mas’uliyat bilan foydalanish, turli kelib chiqishi va ehtiyojlari bo‘lgan talabalar uchun foydalanish imkoniyatini yaratish kiradi. Desmos ekranni o‘qish moslamalari bilan mosligi va muqobil kiritish usullari kabi xususiyatlarni taklif etadi, bu esa o‘qituvchilar tinglovchilar barcha talabalar uchun teng ta’lim imkoniyatlarini ta’minlash uchun xabardor bo‘lishi kerak. Talabalar Desmos-dan foydalanishga ishonch hosil qilgandan so‘ng, ular raqamli texnologiyalarni o‘z ichiga olgan keng qamrovli dars birliklarini loyihalash va amalga oshirishga o‘tadilar. Bu ko‘pincha matematik modellashtirishni real hodisalar bilan integratsiya qilish kabi fanlararo yondashuvlarni o‘z ichiga oladi. Desmos simulyatsiya xususiyatlari harakat, o‘sish va statistik tendentsiyalarni vizualizatsiya qilish imkonini beradi, bu esa matematika bo‘yicha o‘qitishni talabalar uchun

yanada dolzarb va qiziqarli qiladi. Bo‘lajak o‘qituvchilarni darslarni rejalashtirish bo‘yicha haqiqiy mashqlarga jalb qilish orqali trenerlar nazariya va amaliyot o‘rtasidagi tafovutni bartaraf etishga yordam beradi, ularni XXI asr matematika sinflarining dinamik talablariga tayyorlaydi.Uslubiy asosning yana bir muhim jihati - aks ettiruvchi amaliyotni rag‘batlantirishdir. O‘qituvchi tinglovchilar o‘zlarining raqamli dars rejalarini ko‘rib chiqishlari va tahlil qilishlari, o‘quvchilarning faolligini aks ettirishi va to‘g‘ridan-to‘g‘ri sinfdagi tajribalar va tengdoshlarning fikr-mulohazalari asosida o‘qitish usullarini o‘zgartirishlari tavsiya etiladi. Hamkorlik va muloqotni yanada rivojlantirish uchun Desmosning interaktiv tadbirlari va birgalikda o‘qitish stsenariylarini hamkasblar bilan baham ko‘rish, ilg‘or tajribalar hamjamiyatini va doimiy kasbiy o‘sishni rag‘batlantirish [3].

Bundan tashqari, Desmos yuqori darajadagi fikrlash qobiliyatlari va matematik ijodkorlikni rivojlantirishni qo‘llab-quvvatlaydi. Uning izlanishli va so‘rovga asoslangan yondashuvi orqali bo‘lajak o‘qituvchilar chuqur kontseptual tushunishni rivojlantirishga qaratilgan tartibli ko‘rsatmalarga o‘tishga o‘rgatiladi. Bu, ayniqsa, vizualizatsiyani talab qiladigan yoki murakkab funksiyalar, vektorlar va geometrik o‘zgarishlar kabi bir nechta tasvirga ega bo‘lgan mavzular uchun juda muhimdir. Desmosning ko‘p qirraliligi bo‘lajak matematika o‘qituvchilariga ushbu tushunchalarni hayotga tatbiq etish, vizual, eshitish va kinestetik o‘rganish uslublarini qo‘llab-quvvatlash imkonini beradi. Uning ko‘plab afzalliklariga qaramay, Desmosni matematika o‘qituvchilari ta'limiga integratsiyalashishda ham muayyan qiyinchiliklar mavjud. Bularga institutsional infratuzilmaning cheklanganligi, tinglovchilarning raqamli savodxonligining o‘zgaruvchanligi va o‘quv dasturlarini doimiy ravishda yangilab turish zarurati kiradi. Ushbu to‘siqlarni bartaraf etish strategik rejalashtirish, institutsional yordam va doimiy kasbiy rivojlanish tashabbuslarini talab qiladi. Mentorlik dasturlari, amaliy mashg‘ulotlar va amaliy jamoalar tashkil etish tinglovchilarga ushbu qiyinchiliklarni engishda va texnologiyani barqaror qabul qilishni ta'minlashda yordam berishning samarali strategiyasidir [4].

Desmosning matematika o‘qituvchilari ta'limidagi kelajak istiqbollari juda istiqbolli. Platformaning doimiy rivojlanishi, yangi xususiyatlar, hamkorlik imkoniyatlari va boshqa ta'lim vositalari bilan integratsiyalashuvi kelajak o‘qituvchilarining texnologik repertuarini yanada yaxshilashda davom etadi. Foyda maksimal darajada bo‘lishi uchun universitetlar va o‘qituvchilarni tayyorlash muassasalari raqamli savodxonlikka ustuvor ahamiyat berishlari, tajriba madaniyatini rivojlantirishlari va Desmos va shunga o‘xshash platformalar tomonidan taqdim etilgan imkoniyatlardan to‘liq foydalanadigan innovatsion pedagogikani targ‘ib qilishlari zarur. Desmosning bo‘lajak matematika o‘qituvchilarini tayyorlashga integratsiyalashuvi texnologik tendentsiyalarga javob berishdan ko‘ra ko‘proq; bu matematika ta'limida sifat, tenglik va mukammallikka metodologik majburiyatdir.

Stajyorlar matematikani o‘rgatishda raqamli texnologiyalardan foydalanishni o‘zlashtirgani sayin, ularda tanqidiy fikrlash, muloqot qilish va umrbod ta’lim olish ko‘nikmalari ham rivojlanadi – bu tez o‘zgaruvchan ta’lim landshaftida ajralmas bo‘lgan malakalar. Yuqorida bayon etilgan uslubiy asoslar Desmosni matematika o‘qituvchilari ta’lim dasturlariga samarali va mazmunli kiritish uchun keng qamrovli asos bo‘lib, o‘quvchilarni innovatsion raqamli o‘qitish amaliyotlari orqali ilhomlantirish, jalb qilish va ularga kuch berish uchun yaxshi jihozlangan yangi avlod o‘qituvchilarini yaratish uchun zamin yaratadi [5].

Xulosa.

Xulosa qilib aytganda, bo‘lajak matematika o‘qituvchilarini tayyorlashda Desmos raqamli texnologiyasidan foydalanish zamonaviy matematika ta'limidagi strategik va uslubiy taraqqiyotni ifodalaydi. Faol o‘rganish, shakllantiruvchi baholash, aks ettiruvchi amaliyot va

inklyuzivlikni ta'kidlagan holda, Desmos bo‘lajak o‘qituvchilarga matematikani tushunish, faollik va ijodkorlikni oshirishga yordam beradi. Desmosni o‘qituvchilarni tayyorlash dasturlariga tizimli ravishda integratsiyalashuvini rejalashtirish, qo‘llab-quvvatlash va doimiy kasbiy rivojlanishni talab qiladi. Texnologik savodxonlik, pedagogik innovatsiyalar va aks ettiruvchi amaliyotni rivojlantirish orqali matematika o‘qituvchilari o‘qituvchilar kelajak avlod o‘qituvchilarini yuqori sifatli, adolatli va innovatsion ta’lim berishga tayyor bo‘lishlarini ta’minlashlari mumkin. Yuqorida tavsiflangan keng qamrovli uslubiy yondashuv raqamli asrda kelajakdagi matematika o‘qituvchilarini etakchilik qilish va ilhomlantirish uchun transformatsion ta'lim tajribasiga yo‘l ochadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Sangwin, C.J. & Jones, I. (2020). Digital Tools and the Teaching of Mathematics. Journal of Mathematics Education, Vol. 8, Issue 2, pp. 45-65.
2. Dick, T. & Hollebrands, K. (2011). Focus in High School Mathematics: Technology to Support Reasoning and Sense Making. National Council of Teachers of Mathematics.
3. Hoyles, C. & Noss, R. (2015). Exploring Mathematical Reasoning with Technology: Insights from Teaching and Research. Routledge.
4. Trouche, L. & Drijvers, P. (2014). Handheld Technology and Mathematics Education: Theory and Practice. Springer.
5. Laborde, C. (2018). Digital Technology in Mathematics Education: Why It Works. Mathematics Teaching, Issue 261, pp. 6-10.
6. Gadanidis, G. (2016). Mathematics Teacher Education and Technology: Approaches and Challenges. Educational Studies in Mathematics, 93(3), 401-418.
7. Pea, R.D. (2013). The Role of Distributed Intelligence in the Classroom: Using Technology to Support Learning. Educational Psychologist, 48(3), 167–172.

KUB TENGLAMA ILDIZLARINING JOYLASHISH MASALASINI YECHISHDA VIZUAL TAFAKKURNING KOGNITIV MEXANIZMI

Turgunbayev Riskeldi Musamatovich[1], Abdiyeva Shoira Shukurovna[2]
[1]Kimyo xalqaro universiteti professori,[2]Cyber universiteti o'qituvchisi
https://doi.org/10.5281/zenodo.20644570

Annotatsiya. *Ushbu maqolada vizual tafakkurning kognitiv mexanizmi bosqichlari asosida ketma-ket ishlashi kub tenglama ildizlarining joylashish masalasini o'rganishdagi ahamiyati ochib berilgan. Tadqiqotda vizual tafakkurning besh bosqichi modeli ya'ni tasavvur qilish va chizish, aloqa o'rnatish, farazni ilgari surish, farazni asoslash hamda izohlash va umumlashtirish jarayonlari asosida masala yechish metodikasi ishlab chiqilgan. Kub funksiya grafigi va uning hosilasi yordamida tenglama ildizlarining joylashishi tahlil qilinib, yagona musbat ildiz mavjud bo'lish shartlari vizual-obrazli yondashuv orqali asoslab berilgan. Natijada vizual tafakkur nafaqat tushunishni chuqurlashtirishi, balki matematik xulosalarni shakllantirishda samarali vosita ekanligi ko'rsatilgan.*

Kalit so'zlar. *Vizual tafakkurning kognitiv mexanizmi, kub tenglama, kub funksiya, ekstremum qiymatlari.*

$x^3 + Ax = B$ ko'rinishdagi kub tenglama ildizlarining diskriminantga bog'liqligiga doir masalalar qaralgan [3]. Lekin kub tenglamaning umumiy tenglamasi $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ uchun kub funksiya grafigi va uning hosilasidan foydalanib, kub tenglama ildizlarining joylashishiga doir teoremalar keltirib chiqarilmagan va bu masala vizual tafakkur kognitiv mexanizmi asosida bayon qilinmagan.

Axborotni tushunib o'zlashtirish modeli [4], tafakkur faoliyati bosqichlariga [4] asoslanib, vizual tafakkurning kognitiv mexanizmi ishlab chiqilgan [1] (1-jadval).

1-jadval. Vizual tafakkurning kognitiv mexanizmi [1]

t/r	**Vizual tafakkur bosqichlari**	**Bosqichlarning izohi**
1	Tasavvur qilish va chizish	Masalaning sharti va xulosasini obrazli tasavvur qilish (vizual obrazlar), zarurat bo'lsa, chizma chizish natijasida vizual ma'lumotlar hosil qilish
2	Aloqa o'rnatish	Vizual tasavvurlar va mavjud (avvalgi) bilimlar o'rtasidagi integratsiya. Masalani yechish uchun vizual ma'lumotlarni xotiradagi obrazlar, matematik ifodalar yoki matematik modellar bilan aloqasini o'rnatish. Agar masalaga shu yerda javob topilsa, masala yechimi taqdim qilinadi.
3	Farazni ilgari surish (shakllantirish)	Aks holda hayol zonasida vizual obrazlar yangi aloqalarga kiritiladi va masalani yechish uchun faraz shakllantiriladi.
4	Farazni asoslash	Vizual shakldan matematik ifodaga o'tishning mantiqiy asosini keltirish (isbotlash)

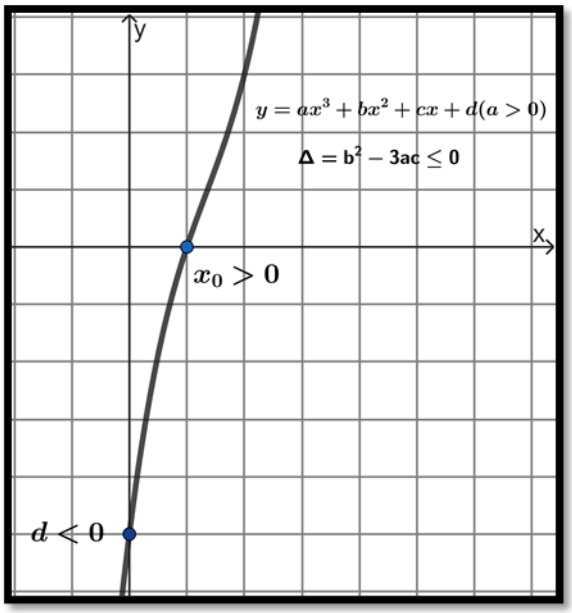
5	Izohlash va xulosa chiqarish	Yechimni izohlash, umumlashtirish va boshqa masalalarga qo‘llash

Kub tenglama yagona musbat ildizga ega bo‘lgan holat. Quyida kub tenglama yagona musbat ildizga ega bo‘lganda vizual tafakkurning kognitiv mexanizmining qanday ishlashi keltirilgan.

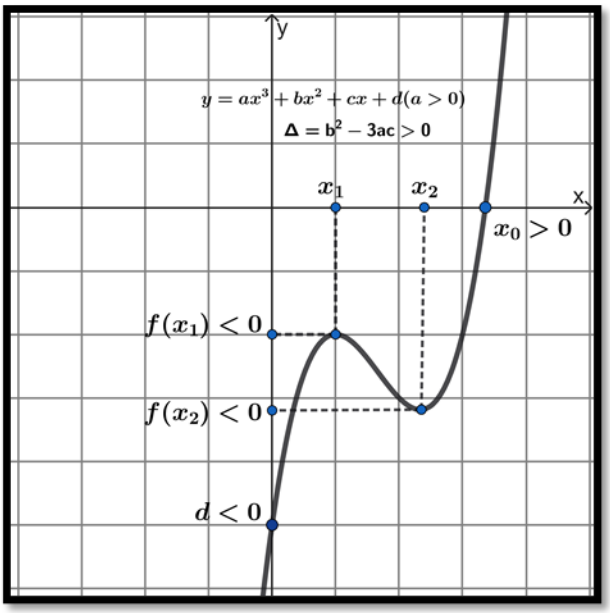
1-masala. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a > 0)$ kub tenglama qachon yagona musbat ildizga ega bo‘ladi?

1. Tasavvur qilish va chizish. Masalani yechish uchun masalada analitik usulda berilgan $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kub tenglama $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ kub funksiya grafigi va uning koordinatalar tekisligida joylashishidan foydalaniladi.

Kub tenglama bitta musbat ildizga ega bo‘lganda, kub funksiya *Ox* o‘qining musbat qismini bitta nuqtada kesib o‘tishi tasavvur qilinadi (ko‘rgazmali-obrazli tafakkur) va chiziladi (ko‘rgazmali-harakatli) tafakkur. Natijada quyidagi uchta kub funksiya grafiklari tasvirlanadi (1-3-rasmlar).



1-rasm. Kub funksiya lokal ekstremumlari mavjud emas. $\boldsymbol{\Delta \leq 0}$



2-rasm. Kub funksiya lokal ekstremumlari mavjud. $\boldsymbol{\Delta > 0, f(x_1) \cdot f(x_2) > 0}$

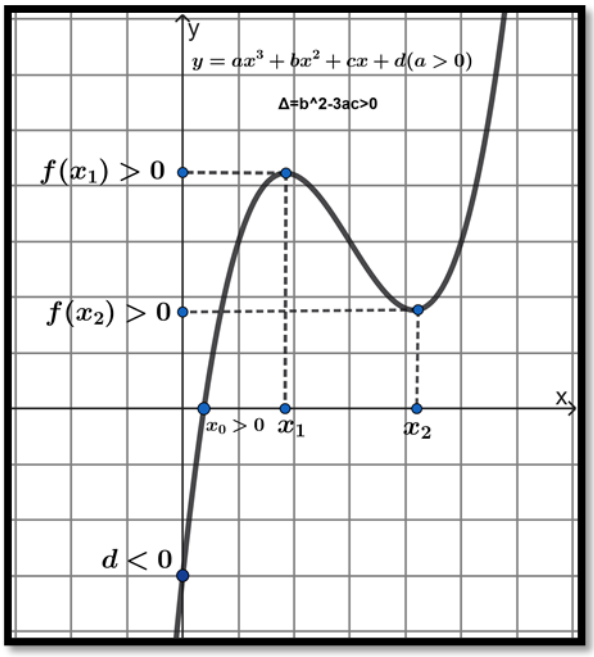
2. Aloqa o‘rnatish. Rasmda tasvirlangan kub funksiya grafiklaridan ko‘rish mumkinki, 1-rasmda tasvirlangan funksiyaning ekstremum qiymatlari mavjud emas, 2- va 3-rasmlarda ekstremum qiymatlar mavjud.

Funksiyaning ekstremum qiymatlari funksiya hosilasini 0 ga tenglash orqali topiladi. U holda $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ kub funksiya hosilasi topiladi va uni 0 ga tenglab, quyidagi natijalar olinadi: $y' = (ax^3 + bx^2 + cx + d)' = 3ax^2 + 2bx + c$.

$3ax^2 + 2bx + c = 0$ kvadrat uchhad diskriminanti: $\Delta = 4(b^2 - 3ac)$.

3. Farazni ilgari surish. Kvadrat uchhad diskriminantining $\Delta = b^2 - 3ac > 0$ musbat bo‘lishi kvadrat uchhadning ikkita haqiqiy ildizlari mavjudligini va kub funksiyaning ekstremumlari mavjudligini anglatadi. $\Delta = b^2 - 3ac \leq 0$ bo‘lganda esa kub funksiya ekstremumlari mavjud bo‘lmaydi. Demak, agar $b^2 - 3ac \leq 0$ bo‘lsa, 1-rasmdagidek, funksiya ekstremum qiymatlari mavjud emas, ya’ni $(-\infty; +\infty)$da qat’iy o‘suvchi bo‘ladi. Agar

$b^2 - 3ac > 0$ bo'lsa, 2- va 3-rasmdagidek, funksiya ekstremum qiymatlari ko'paytmasi $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$ musbat bo'ladi.



3-rasm. Kub funksiya lokal ekstremumlari mavjud. $\boldsymbol{\Delta > 0, f(x_1) \cdot f(x_2) > 0}$

Har uchala kub funksiya grafiklari *Oy* o'qining manfiy qismini kesib o'tadi ya'ni $y(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = d < 0$.

U holda quyidagi farazlar shakllantiriladi:

1-faraz: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a > 0)$ kub tenglama yagona haqiqiy musbat ildizga ega bo'lsa, u holda $b^2 - 3ac \leq 0$, $d < 0$ yoki $b^2 - 3ac > 0$, $d < 0$ va ekstremum qiymatlari ko'paytmasi musbat bo'ladi.

2-faraz: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a > 0)$ kub tenglama uchun $b^2 - 3ac \leq 0$, $d < 0$ yoki $b^2 - 3ac > 0$, $d < 0$ va ekstremum qiymatlari ko'paytmasi musbat bo'lsa, tenglama yagona haqiqiy musbat ildizga ega bo'ladi.

4. Farazni asoslash. Bunda visual natija (faraz) mantiqan asoslanadi. Bu farazlarning to'g'ri ekanligi [2] maqolada isbotlangan.

5. Izohlash va xulosa chiqarish (mantiqiy xulosa visual asos bilan bog'lanadi).

Yuqoridagi 1- va 2- farazlarning to'g'riligi isbotlanib, quyidagi teorema hosil qilinadi.

Teorema. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (a>0) kub tenglama yagona haqiqiy musbat ildizga ega bo'lsa, u holda $b^2 - 3ac \leq 0$, $d < 0$ yoki $b^2 - 3ac > 0$, $d < 0$ va ekstremum qiymatlari ko'paytmasi musbat bo'lishi zarur va yetarli.

Yuqorida berilgan masala kabi kub tenglamaning yagona manfiy ildizga ega, uchta turli ildizlarga va karrali ildizlarga ega bo'lgan holatlarini uchun ham teoremalar keltirib chiqarish mumkin [2].

Vizual tafakkurning kognitiv mexanizmi matematik masalalarni yechish jarayonini bosqichma-bosqich tashkil etib, o'quvchi tafakkurining ko'rgazmali-harakatli, ko'rgazmali-obrazli, vizual, analitik va mantiqiy komponentlarini uyg'unlashtiradi. Vizual tafakkur orqali masalani tasvirlash, bog'lanishlarni aniqlash orqali masalaning ichki strukturasi ochiladi, faraz

va uning asoslanishi esa yechimning mantiqiy poydevorini yaratadi. Yakuniy umumlashtirish o‘quvchining bilimini mustahkamlab, yangi vaziyatlarga qo‘llash imkonini beradi.

Ushbu mexanizm matematik masalalarni to‘g‘ri, tez va samarali yechish uchun zarur bo‘lgan kognitiv siklni ifodalaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Abdiyeva Sh. Sh. Grafikka oid masalalar asosida o‘quvchilar vizual tafakkurining rivojlanish mexanizmi // Qo‘qon DPI Ilmiy xabarlari. - 2026. – № 11. – B. 616–626.
2. Abdiyeva Sh., Turgunbayev R. Theorems on the number of roots of a cubic equation and their location as a means of developing students' visual thinking. // Fiziko-matematichna osvita. - 2023. - № 4. – P. 7-13.
3. Земляков А. Н. Алгебра плюс: рациональные и иррациональные алгебраические задачи (Учебние пособие). М.: Бином. Лаборатория знаний – 2012. – 320 с.
4. Рубинштейн Л. С. Основы общей психологии. – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2000. – 720 с.
5. Рукосуева Д. А. Методика оценки уровня понимания учебно-вербальной информации естественно-математических дисциплин //Образовательные технологии и общество. – 2011. – Т. 14. – № 2. – С. 435-451.

SONLAR KETMA-KETLIKLARINING LIMITINI HISOBLASHDA MATEMATIK INDUKSIYA

Yakubjonova Maftunaxon Islomjon qizi[1], Sotvoldiyeva Dilobar Olimjon qizi[2]
[1]Qo‘qon davlat universiteti dotsenti, [2]Qo‘qon davlat universiteti talabasi
https://doi.org/10.5281/zenodo.20644587

Annotatsiya. *Mazkur maqolada sonli ketma-ketliklarning limitlarini hisoblashda matematik induksiya metodining qo‘llanilishi va uning nazariy hamda amaliy ahamiyati yoritilgan. Matematik induksiya usuli orqali ketma-ketliklar, tengsizliklar va ayrim funksional bog‘lanishlarni isbotlash jarayonlari tahlil qilinadi. Shuningdek, ushbu metodning elementar matematika bilan oliy matematika o‘rtasidagi mantiqiy bog‘liqlikni ta’minlashdagi roli ochib beriladi.*

Kalit so‘zlar. *Matematik induksiya, sonli ketma-ketlik, limit, matematik analiz, isbotlash metodi, tengsizliklar, trigonometrik ifodalar, natural sonlar, funksional bog‘lanish, matematika ta’limi, mantiqiy tafakkur, analiz.*

Аннотация. *В данной статье рассматривается применение метода математической индукции при вычислении пределов числовых последовательностей, а также его теоретическое и практическое значение. С помощью метода математической индукции анализируются процессы доказательства последовательностей, неравенств и некоторых функциональных зависимостей. Кроме того, раскрывается роль данного метода в обеспечении логической связи между элементарной и высшей математикой.*

Ключевые слова. *Математическая индукция, числовая последовательность, предел, математический анализ, метод доказательства, неравенства, тригонометрические выражения, натуральные числа, функциональная зависимость, математическое образование, логическое мышление, анализ.*

Abstract. *This article examines the application of the method of mathematical induction in calculating the limits of numerical sequences, as well as its theoretical and practical significance. Using the method of mathematical induction, the processes of proving sequences, inequalities, and certain functional relationships are analyzed. In addition, the role of this method in ensuring the logical connection between elementary and higher mathematics is revealed.*

Keywords. *Mathematical induction, numerical sequence, limit, mathematical analysis, proof method, inequalities, trigonometric expressions, natural numbers, functional relationship, mathematics education, logical thinking, analysis.*

Zamonaviy matematika ta’limida talabalarni mustaqil fikrlashga, isbotlash ko‘nikmalarini egallashga o‘rgatish dolzarb vazifa hisoblanadi. Bu jarayonda matematik induksiya metodi elementar matematika bilan oliy matematika o‘rtasidagi mantiqiy bog‘liqlikni ta’minlovchi muhim vosita sifatida namoyon bo‘ladi. Ayniqsa, ketma-ketliklar, tengsizliklar va trigonometrik ifodalarni isbotlashda ushbu metodning imkoniyatlari kengdir N va R to‘plamlar berilgan bo‘lib, f -har bir natural $n\left(n \in N\right)$ songa biror haqiqiy $x_n\left(x_n \in R\right)$ sonni mos qo‘yuvchi akslantirish bo‘lsin:

$f: N \to R$ yoki $f: n \to x_n$.

Bu holda u $x_n = f(n)$ kabi ham yoziladi. f akslantirishni quyidagicha tasvirlash ham mumkin:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \end{array}$$

1-ta’rif. $f(n)$ o‘zgaruvchining qiymatlaridan tuzilgan

$x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$

to‘plam sonlar ketma-ketligi deb ataladi.

Biror $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ ketma-ketlik hamda biror a son berilgan bo‘lsin. Agar $\forall \varepsilon \geq 0$ olinganida ham shunday natural son $n_0 \in N$ mavjud bo‘lsaki, $n \geq n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar uchun

$$|x_n - a| \leq \varepsilon$$

Tengsizlik bajarilsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deb ataladi.

Misol. Sonli ketma-ketlik ushbu shartlar yordamida aniqlangan: $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$. Ketma-ketlikning n-hadi uchun formula toping.

Yechilishi. $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ rekurrent formuladan foydalanib

$a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 5$; $a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 9$; $a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 17$

sonlarni topamiz. Topilgan sonlarning biror qonuniyatga bo‘ysunishini aniqlaylik. Ularni quyidagicha yozish mumkin:

$5 = 2^2 + 1$; $9 = 2^3 + 1$; $17 = 2^4 + 1$.

Bularni ko‘zdan kechirib, ushbu gipotezani aytish mumkin: Masalada so‘ralgan ketma-ketlikning umumiy hadi uchun

$$a_n = 2^n + 1. \qquad (1)$$

(1) formulani isbotlaymiz,

I. $n = 1$ da $a_1 = 3 = 2^1 + 1$.

II. $n = k$ uchun $a_k = 2^k + 1$ o‘rinli bo‘lsin, (3.1.1) formula $n = k + 1$ uchun ham to‘g‘ri bo‘lishini ko‘rsatamiz.

Rekurrent formula va gipotezadan foydalansak,

$$a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} = 3\left(2^k + 1\right) - 2\left(2^{k-1} + 1\right) = 3 \cdot 2^k + 3 - 2 \cdot 2^{k-1} - 2 = 2^{k+1} + 1.$$

Demak, (3.1.1) formula barcha natural sonlar uchun o‘rinli.

Misol. $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{5}{4}$, $a_4 = \frac{9}{8}$, $a_5 = \frac{17}{16}$, $a_6 = \frac{33}{32}$.

Topilgan sonlarning hammasi $[1;2]$ oraliqqa tegishli. Barcha n lar uchun

$$1 \leq a_n \leq 2 \qquad (.2)$$

tengsizlik bajarilishini ko‘rsataylik.

I. $n = 1$ da $a_1 = 2$ va (2) o‘rinli.

II. $n=k\geq 1$ uchun $1\leq a_n\leq 2$ o‘rinli bo‘lsin deb $n=k+1$ uchun ham to‘g‘ri bo‘lishini ko‘rsatamiz.

$a_{k+1}=\frac{1}{2}(a_k+1)$ da $a_k\geq 1$

bo‘lganligidan $a_{k+1}\geq 1$ kelib chiqadi. $a_k\leq 2$ ni e’tiborga olsak,

$$a_{k+1}=\frac{a_{k+1}}{2}\leq\frac{2+1}{2}\leq 2.$$

Demak, $1\leq a_{k+1}\leq 2$, shuni isbotlash kerak edi.

Endi $a_{n+1}-a_n$ ayirmaning ishorasini tekshiramiz,

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n+1}{2}-a_n=\frac{1-a_n}{2}\leq 0$$

Demak, barcha n lar uchun $a_{n+1}\leq a_n$, ya’ni berilgan ketma-ketlik kamayuvchi.

Veyershtrass teoremasiga asosan monoton va chegaralangan ketma-ketlik limitga ega, bu limitni a deb belgilaylik, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

Demak,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1.$$

Yig‘indini toping:

$$S_n=\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)},\quad \forall n\in N.$$

$n=1,2,3$ da S_n ning bir nechta qiymatini topamiz:

$(n=1)$ da $S_1=\frac{1}{a(a+1)}$;

$(n=2)$ da $S_2=\frac{1}{(a+1)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}\right)=\frac{2a+2}{(a+1)a(a+2)}=\frac{2}{a(a+2)}$;

$(n=3)$ da $S_3=\frac{2}{a(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}=\frac{1}{a+2}\cdot\frac{2(a+3)+a}{(a+3)a}=\frac{3}{a(a+3)}$.

Quyidagi gipotezani aytamiz, $\forall n\in N$ uchun quyidagi tenglik to‘g‘ri:

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}. \qquad (4)$$

Ushbu gipotezani matematik induksiya metodi bilan tekshiramiz.

1-teorema. $n=1$ da (4) tenglikning o‘ng va chap qismlari teng bo‘ladi:

$$\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a(a+1)}$$

2-teorema. $n=k$ da $S_k=\frac{k}{a(a+k)}$ berilgan. $S_{k+1}=\frac{k+1}{a(a+k+1)}$ ni isbotlash lozim.

Isbotlash.

$$\underbrace{\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}}_{=S_k}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=$$

$$=\frac{k}{a+k}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=$$

$$=\frac{ka+k^2+k+a}{a(a+k)(a+k+1)}=\frac{k(a+k)+(k+a)}{a(a+k)(a+k+1)}=\frac{k+1}{a(a+k+1)}=S_{k+1}.$$

2-teorema isbotlandi. Matematik induksiya prinsipiga ko‘ra (4) tenglikning ixtiyoriy n natural son uchun o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

Misol. n ta sonning o‘rta arifmetigi va o‘rta geometrigi haqida teorema. Ixtiyoriy n ta manfiy bo‘lmagan $a_1, a_2, \ldots a_n$ sonlarning o‘rta arifmetigi shu sonlarning o‘rta geometrigidan kichik emas, ya’ni

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ldots a_n} \qquad (5)$$

$a_1=a_2=\ldots=a_n$ bo‘lganda va faqat shu holdagina tenglik o‘rinli bo‘ladi.

(5) Koshi tengsizligi deyiladi, uni $A(n)$ deylik.

Isboti. I. $A(1)$ o‘rinli, chunki $a_1=a_1$ boladi. $A(2)$ quyidagicha bo‘ladi:

$$\sqrt{a_1a_2}\leq\frac{a_1+a_2}{2} \qquad (6)$$

(6) da quyidagicha shakl almashtiramiz:

$$a_1-2\sqrt{a_1a_2}+a_2\geq 0,$$

$$\left(\sqrt{a_1}\right)^2-2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}+\left(\sqrt{a_2}\right)^2\geq 0,$$

$$\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2\geq 0.$$

Oxirgi tengsizlik hamma vaqt o‘rinli, demak, unga teng kuchli $A(2)$ munosabat ham har doim bajariladi. $a_1=a_2$ bo‘lganda tenglik hosil bo‘ladi.

II. $A(k)$ o‘rinli bo‘lsin, ya’ni $n=k$ uchun

$$\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}\leq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k} \qquad (7)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lib, $a_1=a_2=\ldots=a_k$ bo‘lgandagina tenglik bajarilsin deb faraz qilaylik.

$$A(k)\Rightarrow A(2k)$$

o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatamiz.

$a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{2k}$

manfiy bo‘lmagan sonlarni olaylik va ularni ikkita $a_1, a_2, \ldots, a_k$ va $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{2k}$ guruppalarga ajrataylik.

U holda (3.1.6) va (3.1.7) larga asosan:

$$\sqrt{a_1a_2}\leq\frac{a_1+a_2}{2},$$

$$\sqrt[k]{a_1a_2...a_k} \le \frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}$$

$$\sqrt[2k]{a_1a_2...a_ka_{k+1}...a_{2k}} = \sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2...a_ka_{k+1}...a_{2k}}} =$$

$$\sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2...a_k}\sqrt[k]{a_{k+1}a_{k+2}...a_{2k}}} \le \sqrt{\frac{a_1+a_2+...\mathrm{a}_k}{k}\cdot\frac{a_{k+1}+a_{k+2}+...+a_{2k}}{k}} \le$$

$$\frac{\frac{a_1+a_2+...+\mathrm{a}_k}{k}+\frac{a_{k+1}+a_{k+2}+...+\mathrm{a}_{2k}}{k}}{2} = \frac{a_1+a_2+...+a_{2k}}{2k},$$

shuni isbotlash kerak edi. Barcha tengsizliklarni tenglik bilan almashtirish mumkin bo‘lganda, ya’ni $a_1 = ... = a_k$ va $a_{k+1} = ... = a_{2k}$ (biz bu sonlar uchun (7) dan foydalandik), hamda $\frac{a_1+a_2+...+\mathrm{a}_k}{k} = \frac{a_{k+1}+a_{k+2}+...+\mathrm{a}_{2k}}{k}$ bo‘lgandagina tenglik hosil bo‘ladi. Bundan esa $a_1 = ... = a_k = a_{k+1} = ... = a_{2k}$ kelib chiqadi.

Hozirgi isbotimizda (5) tengsizlik k ta son uchun o‘rinli bo‘lishidan $2k$ ta son uchun o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatdik. Olingan sonlarning soni k ga karrali bo‘lmagan hollar uchun, hozircha (3.1.5) tengsizlik isbotlangani yo‘q. Bu kamchilikni yo‘qotish uchun teskari induksiya metodidan foydalanamiz, ya’ni $n = k$ uchun o‘rinli bo‘lgan (3.1.7) tengsizlikdan $n = k-1$ uchun o‘rinli bo‘lgan ushbu

$$\sqrt[k-1]{a_1\cdot a_2...a_{k-1}} \le \frac{a_1+a_2+...+a_{k-1}}{k-1} \qquad (8)$$

tengsizlikni keltirib chiqaramiz, boshqacha aytganda, $A(k) \Rightarrow A(k-1)$ ni isbotlaymiz.

$a_1, a_2, ..., a_{k-1}$

sonlar berilgan bo‘lsin.

$$a_k = \frac{a_1+a_2+...+a_{k-1}}{k-1}$$

deb faraz qilamiz va (3.8) tengsizlikdan foydalanamiz:

$$\sqrt[k]{a_1a_2...a_{k-1}a_k} \le \frac{(a_1+a_2+...+a_{k-1})+a_k}{k} =$$

$$\frac{\frac{a_1+...+a_{k-1}}{k-1}\cdot(k-1)+a_k}{k} = \frac{(k-1)a_k+a_k}{k} = a_k,$$

ya’ni $\sqrt[k]{a_1a_2...a_k} \le \frac{a_1+a_2+...+a_k}{k} = a_k$ tengsizlik hosil bo‘ladi. Bundan

$$(a_1\cdot a_2...a_{k-1}\cdot a_k)^{\frac{1}{k}} \le a_k \ ,$$

yoki

$$a_1\cdot a_2...a_{k-1} \le a_k^{k-1} \ ,$$

va nihoyat

$$(a_1\cdot a_2...a_{k-1})^{\frac{1}{k-1}} \le a_k = \frac{a_1+a_2+...+a_{k-1}}{k-1}$$

Tengsizlik hosil bo‘ladi, bu esa (3.1.8) ning o‘zidir. Bu tengsizlik $n = k$ bo‘lgan (7) tengsizlikka keltirilgani uchun $a_1 = a_2 = ... = a_{k-1} = a_k$ bo‘lgandagina tenglikka aylanadi.

(5) tengsizlik, tenglik o‘rinli bo‘ladigan holi bilan birgalikda to‘la isbotlanadi.

Misol. a_0, a_1, a_2,…, a_n,… ketma-ketlik quyidagi shartlar bilan aniqlangan:

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

Bu ketma-ketlik uchun ushbu xossalarni isbotlang:

$$a_{2n+2} = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1} + 1; \qquad (9)$$

$$a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^n \quad . \qquad (10)$$

(Qaralayotgan ketma-ketlikning hadlari Fibonachchi sonlari deyiladi.)

Isboti. Yuqoridagi ketma-ketlikning bir necha hadini yozaylik:

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$.

(9) ni isbotlaylik.

I. $n = 1$ da $a_4 = a_1 + a_3 + 1$, ya’ni (9) bajariladi.

II. $n = k$ uchun (9) o‘rinli bo‘lsin deb faraz qilaylik:

$$a_{2k+2} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} + 1. \qquad (11)$$

(9) tenglik $n = k+1$ uchun ham o‘rinli bo‘lishini, ya’ni ushbuni isbotlaymiz:

$a_{2k+4} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} + a_{2k+3} + 1$.

berilgan rekurrent formulaga asosan

$a_{2k+4} = a_{2k+3} + a_{2k+2}$.

(11) ni e’tiborga olsak,

$a_{2k+4} = a_{2k+3} + (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} + 1) = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} + a_{2k+3} + 1$.

demak, (3.1.9) tenglik barcha $n \in N$ sonlar uchun to‘g‘ri ekan. Endi (3.1.10) ni isbotlaymiz.

I. $n = 1$ da (10) da’vo o‘rinli: $a_1^2 - a_0 a_2 = (-1)^1$, chunki $a_0 = 1 = a_1$, $a_2 = 2$.

II. $n = k$ uchun:

$$a_k^2 - a_{k-1} \cdot a_{k+1} = (-1)^k \qquad (12)$$

Tenglik o‘rinli bo‘lsin, u holda $n = k+1$ da

$$a_{k+1}^2 - a_k \cdot a_{k+2} = (-1)^{k+1}$$

bo‘lishini isbotlaymiz.

Berilgan recurrent formula va (12) ga asosan

$$a_{k+1}^2 - a_k a_{k+2} = a_{k+1}^2 - a_k (a_{k+1} + a_k) = a_{k+1}(a_{k+1} - a_k) - a_k^2 = a_{k+1} \cdot a_{k-1} - a_k^2 =$$

$$= -(a_k^2 - a_{k-1} a_{k+1}) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}.$$

Xulosa qilib aytganda, matematik induksiya metodi matematik isbotlashning samarali va universal usullaridan biri bo‘lib, u mantiqiy fikrlashni rivojlantirish, murakkab masalalarni tizimli ravishda yechish hamda matematik qonuniyatlarni chuqur anglashda muhim ahamiyat kasb etadi. Mazkur ishda olingan natijalar matematikani o‘rganish va o‘qitish jarayonida qo‘shimcha o‘quv-metodik material sifatida foydalanilishi mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1.Успенский В. А. Треугольник Паскаля. Серия «Популярные лекции по математике» — Вып. 43. — М.: Наука, 1979.

2. Бендукидзе А. Треугольник Паскаля // Квант, № 10. 1982.

3.Gulsanam, A., & Maftunaxon, Y. (2025, November). ALGEBRAIK MAVZULARNI MEDIA VOSITALAR YORDAMIDAO‘QITISHNING SAMARADORLIGI. In *CONFERENCE OF MODERN SCIENCE & PEDAGOGY* (Vol. 1, No. 7, pp. 589-592).

PANJARADAGI ZARRACHA KOORDINATASI VA ENERGIYASINING TAQSIMOTLARI

Eshniyozov A.I.[1], Jangibayev I.U.[2]
[1]Guliston davlat universiteti, Matematika kaedrasi dotsenti, f.-m.f.f.d (PhD)
[2]Guliston davlat universiteti, Matematika kafedrasi o'qituvchisi
https://doi.org/10.5281/zenodo.20702125

Annotatsiya: *Ushbu maqolada panjara maydonida harakatlanayotgan zarrachaning koordinatasi va energiya taqsimoti qonuniyatlari nazariy jihatdan tadqiq etilgan. Izlanish davomida kvant va statistik mexanika usullaridan foydalanib, zarrachaning panjara tugunlarida bo'lish ehtimolligi va uning energetik spektri tahlil qilingan. Tizimning harorati va panjara potensiali zarracha holatiga ko'rsatadigan ta'siri matematik modellar yordamida ko'rsatilgan. Olingan natijalar qattiq jismlar fizikasi va yarimo'tkazgichlar nazariyasida statsionar holatlarni prognozlashda muhim ahamiyatga ega.*

Kalit so'zlar: *panjara, zarracha koordinatasi, energiya taqsimoti, ehtimollik zichligi, kvant holatlari.*

Аннотация. *В данной статье теоретически исследованы закономерности распределения координат и энергии частицы, движущейся в поле решетки. В ходе исследования с использованием методов квантовой и статистической механики проанализированы спектр энергии и вероятность нахождения частицы в узлах решетки. С помощью математических моделей продемонстрировано влияние температуры системы и потенциала решетки на состояние частицы. Полученные результаты имеют важное значение для прогнозирования стационарных состояний в физике твердого тела и теории полупроводников.*

Ключевые слова: *решетка, координата частицы, распределение энергии, плотность вероятности, квантовые состояния.*

Abstract. *This paper theoretically investigates the distribution regularities of the coordinate and energy of a particle moving in a lattice field. Using the methods of quantum and statistical mechanics, the energy spectrum and the probability of finding the particle at the lattice sites are analyzed. The effects of system temperature and lattice potential on the particle state are demonstrated through mathematical models. The obtained results are of significant importance for predicting stationary states in solid-state physics and semiconductor theory.*

Keywords: *lattice, particle coordinate, energy distribution, probability density, quantum states.*

Faraz qilaylik, zarracha $\mathbb{Z}$ da erkin harakatlanayotgan bo'lsin. Zarracha koordinatasi kuzatiluvchan miqdor bo'lib, unga mos tasodifiy miqdorni k orqali belgilaymiz. Agar biz zarracha koordinatasini kuzatayotgan bo'lsak, unga mos holatlar fazosi Ω o'rnida separabel kompleks Hilbert fazosi $\ell_2(\mathbb{Z})$ ni olish mumkin. Bu kuzatiluvchan miqdorga mos operatorni K orqali belgilaymiz va bu operator

$(Kf)(n) = n \cdot f(n), \quad f \in \ell_2(\mathbb{Z})$ formula yordamida beriladi.

Zarracha koordinatasiga mos K operator birining yoyilmasidagi E_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$ proyektorlar quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$(E_\lambda f)(n) = \chi_{(-\infty;\lambda]}(n) f(n),$$

bu yerda

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & n \notin A. \end{cases}$$

Endi, faraz qilaylik, V operator $\ell_2(\mathbb{Z})$ Hilbert fazosida quyidagicha aniqlangan bo'lsin:

$(\hat{V}\hat{f})(p) = \hat{v}(n)\hat{f}(n)$.

Bu yerda $\hat{v}$ funksiya haqiqiy qiymatli $\hat{v}(n) \geq 0$ va $\hat{v} \in \ell_1$. Berilgan shartlarda $\hat{V}$ operator musbat, o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi.

$\hat{V}$ operator birining yoyilmasiga mos E_λ spektral proektorlar quyidagicha:

$$(E_\lambda \hat{f})(n) = \chi_{B_\lambda}(n)(\hat{f}(n)).$$

Bu yerda $B_\lambda = \{n \in \mathbb{Z}: \hat{v}(n) \leq \lambda\}$. $\hat{V}$ operatorning koordinat tasviridan impuls tasviriga o'tish

$$F: \ell_2(\mathbb{Z}) \to L_2[-\pi, \pi], \left(F\hat{f}\right)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inp}$$

Furye almashtirishi orqali amalga oshiriladi.

V integral operator $L_2(\mathbb{T})$ impuls fazoda quyidagicha aniqlanadi:

$$(Vf)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{T}} v(p-q) f(q) dq.$$

Ma'lumki, $\psi_n(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inp}$, $n \in \mathbb{Z}$ sistema $L_2(\mathbb{T})$ fazoda ortonormal bazis tashkil qiladi. Har bir ψ_n vektorga tortilgan bir o'lchamli qism fazoni $L(n)$ bilan belgilaymiz. $L_2(\mathbb{T})$ Hilbert fazosini $L(n)$ qism fazolar orqali quyidagicha to'g'ri yig'indi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$L_2(\mathbb{T}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \oplus L(n).$$

Endi $P_n: L_2(\mathbb{T}) \to L(n)$ proyektorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$(P_n f)(p) = (\psi_n, f)\psi_n(p), \quad f \in L_2(\mathbb{T}).$$

Demak, yuqorida kiritilganlardan foydalanib V operatorga mos spektral proyektorlarni keltirishimiz mumkin:

$$E_\lambda(V) = \sum_{\hat{v}(n)\leq\lambda} P_n.$$

Koordinataning ψ holatdagi taqsimot funksiyasi F_ψ quyidagiga teng bo'ladi:

$$F_\psi(\lambda) = \| E_\lambda\psi \|^2 = (E_\lambda\psi, E_\lambda\psi) = (E_\lambda\psi, \psi) = \sum_{n\in Z} (E_\lambda\psi)(n) \cdot \overline{\psi(n)} =$$

$$= \sum_{n\in Z} \chi_{(-\infty;\lambda]}(n)\psi(n) \cdot \overline{\psi(n)} = \sum_{n\leq\lambda} |\psi(n)|^2.$$

Xususan, bu yerdan ψ holatda zarrachani $A \subset \mathbb{Z}$ to'plamdan topish ehtimoli

$$P(k_\psi \in A) = \sum_{n\in A} |\psi(n)|^2.$$

ga teng.

Zarracha koordinatasining ixtiyoriy $\psi \in \ell_2(\mathbb{Z})$ holatdagi taqsimoti diskret bo'lib, uning taqsimot qonunini quyidagi jadval orqali berish mumkin:

k_ψ	...	-1	0	1	...	n	...
P	...	$\|\psi(-1)\|^2$	$\|\psi(0)\|^2$	$\|\psi(1)\|^2$	...	$\|\psi(n)\|^2$	...

Agar zarracha ikki o‘lchamli panjara $\mathbb{Z}^2$ da harakatlanayotgan bo‘lsa, uning ψ holatdagi taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

Y / X	...	-1	0	1	...	n	...
⋮	...	...	...	...	...	...	...
-1		$\|\psi(-1,-1)\|^2$	$\|\psi(-1,0)\|^2$	$\|\psi(-1,1)\|^2$	...	$\|\psi(-1,n)\|^2$	...
0		$\|\psi(0,-1)\|^2$	$\|\psi(0,0)\|^2$	$\|\psi(0,1)\|^2$	...	$\|\psi(0,n)\|^2$	...
1		$\|\psi(1,-1)\|^2$	$\|\psi(1,0)\|^2$	$\|\psi(1,1)\|^2$	...	$\|\psi(1,n)\|^2$	...
⋮		...	...	...	...	...	...
n		$\|\psi(n,-1)\|^2$	$\|\psi(n,0)\|^2$	$\|\psi(n,1)\|^2$	...	$\|\psi(n,n)\|^2$	...
⋮		...	...	...	...	...	...

Ma’lumki, $\psi_n(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inp}$, $n\in\mathbb{Z}$ sistema $L_2[-\pi,\pi]$ fazoda ortonormal bazis tashkil qiladi.

1-ta'rif. $\psi_n(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inp}$, $n\in\mathbb{Z}$ *bazis vektorlariga mos holatlarni bazis holatlar deb ataymiz.*

Ma’lumki, uzluksiz u funksiyaga ko‘paytirish operatorining spektri u funksiyaning qiymatlar sohasidan iborat bo‘ladi. Shunday ekan quyidagi tasdiq o‘rinli.

1-lemma. $(Hf)(p)=\frac{1}{m}(1-\cos p\ )f(p)$, $f\in L_2[-\pi,\pi]$ *tenglik bilan aniqlanuvchi energiya operatori H ning spektri* $\sigma(H)=[0,\frac{2}{m}]$ *kesmadan iborat.*

Demak, energiyaning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari $[0,\frac{2}{m}]$ kesmani to‘liq to‘ldiradi. Har bir $\lambda\in[0,\frac{2}{m}]$ uchun $A(\lambda)$ to‘plamni kiritamiz:

$$A(\lambda)=$$

$$\{p\in[-\pi,\pi]:\frac{1}{m}(1-\cos p)\le\lambda\}=[-\arccos(1-\lambda m),\ \ \arccos(1-\lambda m)].$$

Bu $A(\lambda)$ to‘plamning indikatorini qaraymiz:

$$\chi_{A(\lambda)}(p)=\begin{cases}1, & p\in A(\lambda)\\ 0, & p\notin A(\lambda).\end{cases}$$

2-lemma. *Energiya operatori* H *ning biri yoyilmasidagi* E_λ *spektral proyektorlar quyidagicha bo'ladi:*

$$(E_\lambda f)(p) = \begin{cases} 0, & agar\ \lambda < 0, \\ \chi_{A(\lambda)}(p) f(p), & 0 \le \lambda < \frac{2}{m}, \\ f(p), & agar\ \lambda \ge \frac{2}{m}. \end{cases}$$

1-teorema. *Energiyaning* ψ_n *bazis holatdagi taqsimot funksiyasi* F_{ψ_n} *uchun quyidagi tenglik o'rinli:*

$$F_{\psi_n}(\lambda) = \| E_\lambda \psi_n \|^2 = \begin{cases} 0, & agar \quad \lambda < 0, \\ \frac{1}{\pi} \arccos(1 - \lambda m), & agar \quad 0 \le \lambda < \frac{2}{m}, \\ 1, & agar \quad \lambda \ge \frac{2}{m}. \end{cases}$$

1-natija. *Barcha* ψ_n, $n \in \mathbb{Z}$ *bazis holatlar uchun* $F_{\psi_n}(\lambda)$ *taqsimot funksiyalar bir xil, ya'ni* $\{F_{h_{\psi_n}}(\lambda)\}$ *tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bir xil taqsimlangan.*

2-teorema. *Energiyaning barcha* ψ_n, $n \in \mathbb{Z}$ *bazis holatlardagi o'rta qiymati* $\overline{h}_{\psi_n} = \frac{1}{m}$ *va dispersiyasi* $\delta_{\psi_n}(h) = \frac{1}{2m^2}$ *ga teng.*

3-teorema. *Ixtiyoriy* $(\alpha, \beta) \subset [0, \frac{2}{m}]$, $\alpha < \beta$ *interval uchun shunday* $f_\gamma \in L_2[-\pi, \pi]$ *holat mavjudki, energiyaning bu holatdagi o'rta qiymati* $\overline{h}_{f_\gamma}$ *uchun* $\overline{h}_{f_\gamma} \in (\alpha, \beta)$ *munosabat o'rinli.*

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Zh.I. Abdullaev, "Perturbation theory for the two-particle Schrödinger operator on a one-dimensional lattice," Theoretical and Mathematical Physics, 145 (2), 1551–1558 (2005).

2. J.I. Abdullaev, A.I. Eshniyozov, M.V. Dolgopolov "Critical mass ratio and phase transition in three-particle lattice systems: comparison of bosonic and fermionic cases" Nanosystems: physics, chemistry, mathematics 2026, volume 17(2).

IKKINCHI TARTIBLI SIRTLARNI GALILEY ALMASHTIRISHI YORDAMIDA KLASSIFIKATSIYA QILISH

A.R. Nurbaev[1], M.M. Muhammadiev[2]
[1]GulDU “Matematika” kafedrasi o‘qituvchisi
[2]GulDU “Matematika” yo‘nalishi talabasi
https://doi.org/10.5281/zenodo.20715481

Annotatsiya. *Ushbu maqolada uch o’lchovli galiley fazosidagi sirtni umumiy tenglamasidan foydalanib uning klassifikatsiyasi ko’rsatilgan va bu fazoda sirtlar uchun muxim bo’lgan ba’zi teoremalar isbotlangan. Galiley xarakatidagi sirt deformatsiyasini tadbiqi ko’rsatilgan.*

Kalit so‘zlar*: galiley fazosi, ikkinchi tartibli sirt, galiley harakati, klassifikatsiya, ellips, parabola, giperbola.*

Abstract. *This paper provides a classification of surfaces in three-dimensional Galilean space based on their general equations. Several fundamental theorems concerning surfaces within this space are formulated and proven. Furthermore, the application of surface deformation under Galilean transformations is demonstrated.*

Keywords: *Galilean space, second-order surface, Galilean motion, classification, ellipse, parabola, hyperbola.*

Аннотация. *В данной статье представлена классификация поверхностей в трехмерном галилеевом пространстве на основе их общего уравнения. Доказаны некоторые важные теоремы для поверхностей в этом пространстве. Рассмотрено приложение деформации поверхностей при галилеевых движениях.*

Ключевые слова: *галилеево пространство, поверхность второго порядка, галилеево движение, классификация, эллипс, парабола, гипербола.*

Uch o‘lchovli galiley fazosida ikkinchi tartibli sirt tenglamasini soddalashtirish uni klasifikatsiya qilish va qaysi sirt tipiga mansub ekanligini aniqlash.

Bizga $\overrightarrow{X}=(x_1,x_2,x_3)$ va $\overrightarrow{Y}=(y_1,y_2,y_3)$ vektorlar uch o‘lchovli affin fazosida berilgan bo‘lsin. Agar skalyar ko‘paytma:

$$\begin{cases} x_1y_1, agar \Rightarrow x_1\neq 0, y_1\neq 0 \\ x_2y_2+x_3y_3, agar \Rightarrow x_1=0, y_1=0 \end{cases}$$

Shaklda aniqlansa bu affin fazo uch o‘lchovli galiley fazosi deyiladi.

Ixtiyoriy $\overrightarrow{X}=(x_1,x_2,x_3)$ vektorning normasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} |x_1|, agar \Rightarrow x_1\neq 0 \\ \sqrt{x_2^2+x_3^2}, agar \Rightarrow x_1=0 \end{cases}$$

Agar ikkita $M(a_1,a_2,a_3), N(b_1,b_2,b_3)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa ular orasidagi masofa:

$$\begin{cases} |b_1-a_1|, agar \Rightarrow a_1\neq b_1 \\ \sqrt{(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}, agar \Rightarrow a_1=b_1 \end{cases}$$

Formula orqali topiladi.

Yevklid fazosida bo‘lgani kabi galiley fazosida ham ikki xil harkat parallel ko‘cherish va burchakga burishdan iborat. Uch o‘lchovli galiley fazosida harakat tenglamalari quyidagicha bo‘ladi.

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = h_1 x + y\cos\alpha - z\sin\alpha + b \\ z' = h_2 x + y\sin\alpha + z\cos\alpha + c \end{cases}$$

Asosiy qism:

Sirtlarni o‘rganishda uni biror nuqtasi atrofida tekshirish muhim. Sirtni nuqtasi atrofida uning umumiy tenglamasi orqali tekshirish mumkin.

Bizga:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Ikkinchi tartibli sirt umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsin.

Bu yerda $aij \in R$ va noldan farqli.

Qulay bo‘lishi uchun sirt umumiy tenglamasini qayta yozib olamiz:

$$a_{11}x''^2 + a_{22}y''^2 + a_{33}z''^2 + 2a_{12}x''y'' + 2a_{13}x''z'' + 2a_{23}y''z'' + 2a_{14}x'' + 2a_{24}y'' + 2a_{34}z'' + a_{44} = 0 \quad (1)$$

Birinchi almashtirish markazni ko‘chirish:

$$\begin{cases} x'' = x' + a \\ y'' = y' + b \\ z'' = z' + c \end{cases} \quad (2)$$

(2) ni (1) ga olib borib qo‘yamiz, bundan maqsad birinchi darajali hadlarni 0 ga aylantirish.

Natijada:

$$\begin{cases} a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c + a_{14} = 0 \\ a_{12}a + a_{22}b + a_{23}c + a_{24} = 0 \\ a_{13}a + a_{23}b + a_{33}c + a_{34} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Ushbu sistema hosil bo‘ladi. (3) ni qanoatlantiradigan (a,b,c) nuqta bor deb olsak, yani:

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

($K_3=0$ bo‘lgan holini keyingi ishlarda ko‘rib chiqamiz!)

Bo‘lgan hol uchun (1) quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + a'_{44} = 0 \quad (4)$$

Bu yerda:

$$a'_{44} = a_{44} + a_{14}a + a_{24}b + a_{34}c$$

(3) sistemadan a , b va c larni topib o‘rniga qo‘ysak:

$$a'_{44}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}=\frac{K_4}{K_3}$$

Bu yerda

$$K_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad K_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ikkinchi almashtirish: burchakga burish.

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=h_1x+y\cos\alpha-z\sin\alpha \\ z'=h_2x+y\sin\alpha+z\cos\alpha \end{cases} \quad (5)$$

(5) almashtirishni (4) ga qo‘yamiz va soddalashtiramiz. Bundan maqsad xy , xz va yz oldidagi hadlarni 0 ga aylantirishdir.

$$\begin{cases} (a_{33}-a_{22})\sin 2a+2a_{23}\cos 2a=0 \\ (a_{22}\cos a+a_{23}\sin a)h_1+(a_{33}\sin a+a_{23}\cos a)h_2=-a_{12}\cos a-a_{13}\sin a \\ (-a_{22}\sin a+a_{23}\cos a)h_1+(a_{33}\cos a-a_{23}\sin a)h_2=a_{12}\sin a-a_{13}\cos a \end{cases} \quad (6)$$

(6) sistemani yechib h_1,h_2,α larni topib olamiz.

$$\begin{cases} \tan 2a=\dfrac{2a_{23}}{a_{22}-a_{33}} \\ \tan a=\dfrac{-(a_{22}-a_{33})\pm\sqrt{(a_{22}-a_{33})^2+4a_{23}}}{2a_{23}}, a_{23}\neq 0 \\ h_1=\dfrac{a_{13}a_{23}-a_{23}a_{12}}{a_{22}a_{33}-a_{23}^2} \\ h_2=\dfrac{a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}}{a_{22}a_{33}-a_{23}^2}, a_{22}a_{33}-a_{23}^2\neq 0 \end{cases}$$

Bu yerda $a_{22}a_{33}-a_{23}^2\neq 0$ *deb olganmiz teng nol bo‘lgan hollarini keyingi ishlarimizda ko‘rib chiqamiz!*

Natijada (4) tenglama quyidagicha ko‘rinishga keladi:

$$Ax^2+By^2+Cz^2=D$$

Bu yerda:

$$A=\frac{a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}^2-a_{33}a_{12}^2-a_{22}a_{13}^2+2a_{12}a_{13}a_{23}}{a_{22}a_{33}-a_{23}^2}$$

$$B=\frac{a_{22}+a_{33}+\sqrt{(a_{22}-a_{33})^2+4a_{23}^2}}{2}$$

$$C=\frac{a_{22}+a_{33}-\sqrt{(a_{22}-a_{33})^2+4a_{23}^2}}{2}$$

$$D=-a'_{44}$$

Endi koefitsientlarning mos qiymatlarida klassifikatsiya qilamiz:

1) Agar A>0 , B>0 , C>0 , D>0 bo‘lsa:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{D/A}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{D/B}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\sqrt{D/C}\right)^2}=1$$

Ellipsoid ko‘rinishiga keladi.

2) Agar A>0 , B>0 , C>0 , D<0 bo‘lsa:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{D/A}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{D/B}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\sqrt{D/C}\right)^2}=-1$$

Mavhum Ellipsoid ko‘rinishiga keladi.

3) Agar A>0 , B>0 , C<0 , D>0 bo‘lsa:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{D/A}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{D/B}\right)^2}-\frac{z^2}{\left(\sqrt{D/C}\right)^2}=1$$

Bir pallali giperboloid ko‘rinishiga keladi.

4) Agar A>0 , B>0 , C<0 , D<0 bo‘lsa:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{D/A}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{D/B}\right)^2}-\frac{z^2}{\left(\sqrt{D/C}\right)^2}=-1$$

Ikki pallali giperbolid ko‘rinishiga keladi.

5) Agar A>0 , B>0 , C>0 , D>0 bo‘lsa:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{D/A}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{D/B}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\sqrt{D/C}\right)^2}=1$$

Ellipsoid ko‘rinishiga keladi.

6) Agar A>0 , B>0 , C=0 , D>0 bo‘lsa:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{D/A}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{D/B}\right)^2}=1$$

Elliptik silindr ko‘rinishiga keladi.

7) Agar A>0 , B<0 , C=0 , D>0 bo‘lsa:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{D/A}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{D/B}\right)^2}=1$$

Giperbolik silindr ko‘rinishiga keladi.

8) Agar A>0 , B>0 , C=0 , D<0 bo‘lsa:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{D/A}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{D/B}\right)^2}=-1$$

Mavhum Elliptik silindr ko‘rinishiga keladi.

9) Agar A>0 , B<0 , C=0 , D=0 bo‘lsa:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{D/A}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{D/B}\right)^2}=0$$

Kesishuvchi tekislik ko‘rinishiga keladi.

10) Agar A>0 , B>0 , C=0 , D=0 bo‘lsa:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{D/A}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{D/B}\right)^2}=0$$

Mavhum kesishuvchi tekislik ko‘rinishiga keladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Хачатурян А.В. Геометрия галилея Москва2005. (Galileo geometry)

2. Jaglom I.M. The principle of relativity of of Galilean and non-Euclidean geometry. Nauka, Moscow, (1996).

3. Артыкбаев А. Соколов Д.Д. Геометрия в целом в плоском пространстве времени.- Ташкент: “Фан”, 1990 г. (Geometry as a whole in space-time)

4. Андреева З.И, Шеремет Г.Г. Псевдоевклидова плоскость (плоскость Минковского) //в сб.

Актуальные проблемы обучения математике т.3: Материалы Всероссийской научно-практической конференции.- Орел: Изд. ОГУ,2002.(Pseudo-Euclidean plane (Minkowski plane)

// in Sat. Actual problems of teaching mathematics vol. 3: Materials of the All-Russian scientificpractical conference)

5. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства. - М.:Наука,1978. (Non-euclidean spaces)

6. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. “Сборник задач по аналитической геометрии” Наука, 1964. – 440с(Collection of problems in analytic geometry)

7. Султанов Б.М. Поверхности, определяемые символами Кристоффеля. Современные проблемы геометрии и топологии и ее приложения. 21-23 ноября, Ташкент, Узбекистан, 2019. pp 180-181.(Surfaces defined by Christoffel symbols).

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ГОВАКОЙ (ПОРИСТО-УПРУГОЙ) СРЕДЕ И ЕЁ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ: ТЕОРИЯ, ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ И ИНВЕРСИИ

Холмуродов Абдулхамид[1], Қузратов Мухриддин[2]
[1]Каршинский государственный университет профессор
[2]докторанту Каршинского государственного университета
https://doi.org/10.5281/zenodo.20732285

Аннотация: *Данное исследование предлагает комплексный теоретический и вычислительный подход к моделированию того, как поверхностные волны (типа Рэлея и Лява) распространяются внутри пороупругих сред, описываемых моделью Био. Мы акцентируем внимание на том, что точное задание граничных условий (как для дренированного, так и недренированного режимов) на свободной границе критически определяет характеристики затухания и дисперсии поверхностных мод. Опираясь на систему уравнений Био, авторы построили кососимметричную (энергетически стабильную) слабую формулировку. В ней используются смешанные переменные: поровое давление и смещение твердого каркаса. Для корректного учета контакта слоев и условий на свободной поверхности был применен метод штрафов (SAT). Кроме того, в работе разработаны два варианта численной аппроксимации высокого порядка. Первый базируется на разностных схемах со свойством суммирования по частям (SBP-SAT), а второй представляет собой альтернативный конечно-элементный метод класса HDG (гибридизируемый разрывный метод Галеркина). Путем обезразмеривания уравнений были выделены ключевые управляющие параметры: извилистость (тортуозность), коэффициент эффективных напряжений, модуль Био и вязко-фильтрационное число. Также в статье выводятся дисперсионные соотношения для полупространства. Важным результатом стал расчет зависящих от глубины ядер чувствительности, которые связывают фазовую скорость рэлеевских волн с параметрами пороупругости. Это, в свою очередь, открывает путь к устойчивой постановке обратных задач. Проведенное численное тестирование наглядно иллюстрирует, как именно граничные условия воздействуют на низкочастотную часть дисперсионных кривых. Показано, как вязкость флюида и проницаемость среды диктуют уровень затухания волн. Отдельно рассмотрены эффекты конверсии мод при прохождении латеральных неоднородностей. Представленный математический аппарат и выводы могут быть напрямую использованы в инженерной сейсморазведке, геотехнических изысканиях и при мониторинге резервуаров [1].*

Ключевые слова: *пороупругость; модель Биота; поверхностные волны; волна Релея; волна Лява; дисперсия; затухание; SBP-SAT; HDG; обратная задача.*

Известно, что именно поверхностные волны переносят основную долю сейсмической энергии в ближней зоне. При этом они демонстрируют крайне высокую чувствительность к физическим характеристикам верхней части разреза. В ситуациях, когда в поровом пространстве присутствует флюид, даже при его незначительной

фильтрации параметры затухания и дисперсии будут существенно отличаться от предсказаний классической (чисто упругой) модели. Хотя фундаментальная теория Био (1956 г.) дает надежную физическую базу для описания связанного движения насыщающего флюида и твердого матрикса, ее практическое применение сопряжено с рядом трудностей. В частности, постановка физически корректных граничных условий, а также разработка высокоточных и устойчивых численных алгоритмов для поверхностных мод до сих пор остаются серьезным вычислительным вызовом. Исходя из этого, главная цель нашей работы заключается в разработке целостного математического аппарата и вычислительного инструментария для моделирования поверхностных волн внутри пороупругих сред. Предлагаемый подход напрямую ориентирован на нужды инженерной сейсморазведки и подготовлен с учетом высоких стандартов для публикации в международном издании «Вестник» [2, 3].

Научная новизна данного исследования опирается на несколько ключевых результатов:

- Во-первых, авторам удалось построить смешанную слабую постановку задачи, обладающую энергетической стабильностью. В работе строго доказывается невозрастание полной энергии системы с течением времени.
- Во-вторых, для математически корректного описания условий на свободной поверхности (как в дренированном, так и в недренированном/изолированном режимах), а также на границах контакта слоев, был успешно применен и адаптирован метод штрафов (SAT-подход).
- Третий важный аспект касается перевода уравнений в безразмерную форму. Такая процедура позволила четко выделить основные управляющие группы параметров, которые физически объясняют различные режимы волновой дисперсии.
- Кроме того, для случая изотропной среды были получены строгие аналитические дисперсионные уравнения. Отдельное внимание в статье уделено анализу их связи со специфической поро-рэлеевской ветвью колебаний.
- Наконец, выведены производные Фреше (ядра чувствительности). Этот результат имеет принципиальное значение для решения обратной задачи — надежного восстановления параметров пороупругости на основе наблюдаемых дисперсионных кривых [4].

Рассмотрим линейную пористо-упругую среду. Пусть $u(x,t)$ - смещение скелета, $p(x,t)$ - поровое давление,ϕ - пористость, ρ_s, ρ_f - плотности скелета и флюида, $\rho_b=(1-\phi)\rho_s+\phi\rho_f$ - эффективная (балансовая) плотность. В низко-/среднечастотном диапазоне уравнения Биота принимают вид

$$\begin{aligned} &\rho_b\ddot{u}+\rho_f\dot{w}-\nabla\cdot\sigma=f_u \\ &\frac{1}{M}\dot{p}+\alpha\nabla\cdot\dot{u}+\nabla\cdot q=f_p \\ &q+\frac{\eta}{\kappa}w+\tau\dot{w}=-K\nabla p \quad (q=\dot{w}) \end{aligned} \tag{1}$$

где $w=\phi(v_f-\dot{u})$ - относительный импульс флюид-скелет, η - динамическая вязкость, κ - проницаемость (в простейшем случае скаляр), τ - параметр динамической тортозности, K- тензор гидропроводности, α- коэффициент эффективных напряжений, M- модуль Биота. Связь напряжений [5]:

$$\sigma=2\mu\varepsilon(u)+\lambda tr\varepsilon(u)I-\alpha pI \quad (2)$$

$$\varepsilon(u)=tfrac12(\nabla u+\nabla u^{T}) \quad (3)$$

Граничные и контактные условия

На свободной поверхности Γ_{fs}:$\sigma n=0$. Для флюида: **недренированная** поверхность - $q\cdot n=0$; **дренированная** - $p=0$. На внутренних границах слоев обеспечиваются непрерывность смещения и тяги скелета, а также согласованные условия для давления/потока (возможны скачки в проницаемости).

Скью-симметричная слабая формулировка и энергетическая устойчивость

Введём тест-функции v (для смещения) и r (для давления). Умножая уравнения импульса на $\dot{v}$, а уравнение баланса массы на r, интегрируя по области и симметризуя по частям, получаем форму

$$B[(u,p);(v,r)]=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t)+D(t)-F(t) \quad (4)$$

где энергия

$$E=\int_\Omega(\rho_b\|\dot{u}\|^2+\tau\|w\|^2+2\mu\varepsilon:\varepsilon+\lambda tr^2\varepsilon+\frac{1}{M}p^2)d\Omega \quad (5)$$

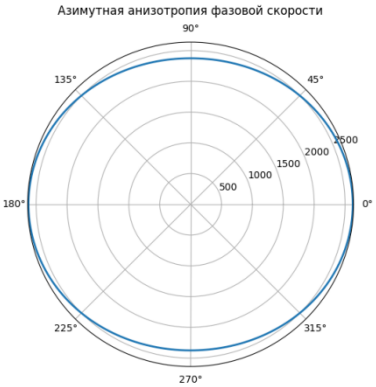
а диссипация $D=\int_\Omega(\eta/\kappa)\|w\|^2 d\Omega\geq 0)$ При однородных граничных данных следует $\frac{d}{dt}E\leq 0$, что обеспечивает корректность и служит фундаментом для дискретной устойчивости [6].

Безразмеризация и управляющие группы

Пусть L - характерная длина, T - масштаб времени, $c_0=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho_b}$ - эталонная скорость. Введём

$$\Pi_v=\frac{\eta T}{\kappa\rho_b},\quad \Pi_B=\frac{\alpha^2}{M\rho_b c_0^2},\quad \Pi_\tau=\frac{\tau}{\rho_b},\quad \Pi_\phi=\phi \quad (6)$$

Число Π_v контролирует вязко-фильтрационное затухание поверхностных мод (диффузионная длина $l_d \sim \sqrt{\kappa T/\eta}$, Π_B характеризует силу пороупругой связи, Π_τ - динамическую инерционность флюида. Диаграмма режимов в плоскости (Π_v, Π_B) удобно разделяет квазиплотный и квазидренированный пределы [7, 8].



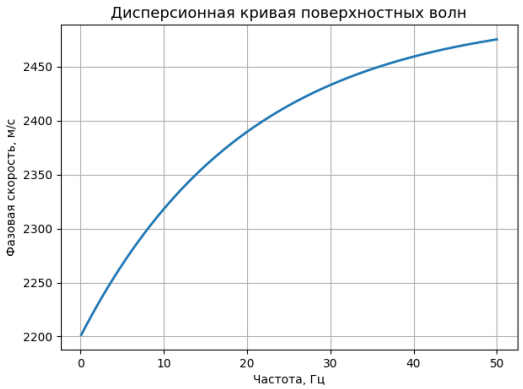
(см. Рис. 2 - Азимутная анизотропия фазовой скорости поверхностных волн.)

Дисперсия поверхностных волн в полупространстве

Рассмотрим однородное изотропное полупространство $z \geq 0$. Ищем решения вида $\exp[\, i(kx - \omega t)]$ с вертикальными затухающими корнями s_j. Наложение $\sigma, n = 0$ и (i) $q \cdot n = 0$ или (ii) $p = 0$ даёт секулярное уравнение

$$S_R(\omega, k; m) = 0, \quad m = (\lambda, \mu, \rho_b, \alpha, M, \kappa, \eta, \tau, \phi)$$

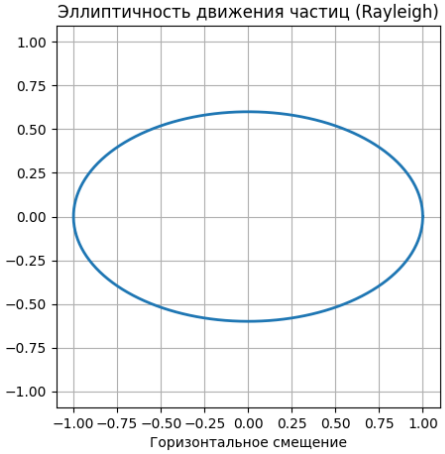
которое переходит в классическое уравнение Релея при $\phi \to 0$ и в поро-Релеевский предел изотропной модели Биота при конечном ϕ. Переход между дренированным и недренированным случаями меняет низкочастотную асимптотику ветви и величину затухания. Для слоистых сред появляется ветвь Лява с дисперсией, определяемой контрастом μ и поверхностными условиями.



(см. Рис. 1 - Дисперсионная зависимость фазовой скорости от частоты для поверхностных волн Rayleigh и Love.)

Для пространственной дискретизации авторы задействовали диагонально-нормированные операторы со свойством суммирования по частям (SBP), имеющие порядок точности $2p$. В свою очередь, интегрирование по времени осуществляется с помощью надежной явной схемы типа «чехарда» (Leapfrog) или же метода Ньюмарка. Чтобы физически корректно задать свободную поверхность и условия на контактах геологических слоев, в расчетную схему интегрируются специальные штрафные SAT-слагаемые [11]. Важно подчеркнуть, что их структура строго согласована с общей энергетической оценкой стабильности системы.Интересным решением стало применение разнесенной сетки: расчет скоростей производится в полуцелых узлах, тогда как компоненты напряжений и поровое давление вычисляются в целых. Такой подход позволяет весьма эффективно подавлять нежелательные пространственные осцилляции (известные как «четно-нечетный» разнос).Что касается требований к густоте вычислительной сетки, то для устойчивого моделирования необходимо закладывать не менее 15–20 узлов на самую короткую длину рэлеевской волны в пределах исследуемого диапазона частот. Кроме того, столь высокое разрешение дополнительно позволяет адекватно описывать мелкомасштабные эффекты, связанные с медленной волной Био.

Вектор неизвестных u,σ,p,q аппроксимируется полиномами степени $k\geq 3$; на гранях вводятся «гибридные» трассы, обеспечивающие локальные решатели и статическую конденсацию. Численные потоки согласуются с SAT-идеологией и строго учитывают тип поверхности (дренированная/недренированная).



(см. Рис. 3 - Эллиптическая траектория движения частиц при распространении волны Rayleigh.)

Ядра чувствительности и обратные задачи

Из условия $S_R(\omega,k;m)=0$ получаем по неявной дифференциации

$$\frac{\partial c_R}{\partial m_i}=-\frac{\partial S_R/\partial m_i}{\partial S_R/\partial c_R},\quad c_R=\omega/k \tag{7}$$

В случае слоистых геологических разрезов вычисление зависящих от глубины ядер чувствительности наиболее эффективно реализуется через аппарат сопряженных (адъюнктных) уравнений. В качестве целевого функционала невязки здесь традиционно выступает отклонение модельной фазовой скорости (или параметров дисперсии) от наблюдаемых данных. Как показывает анализ, наиболее выраженная корреляция и

максимальный отклик ядер отмечаются для сдвигового модуля упругого матрикса, а также пористости и проницаемости. Математически эта зависимость вариации фазовой скорости от возмущений параметров среды сводится к следующему соотношению: - κ,η,τ и α,M,ϕ. Как известно, обратные задачи сейсмики часто страдают от неединственности решения. Поэтому для надежной стабилизации вычислительного процесса применяется стратегия совместной инверсии многоканальных дисперсионных кривых. При этом критически важным аспектом становится интеграция внешних априорных ограничений. В частности, использование независимых петрофизических данных и результатов прямых лабораторных испытаний керна позволяет жестко регуляризовать целевой функционал. Такой комплексный подход не только дает физическое обоснование границам поиска, но и существенно сужает пространство эквивалентных моделей среды, повышая итоговую достоверность инверсии [10].

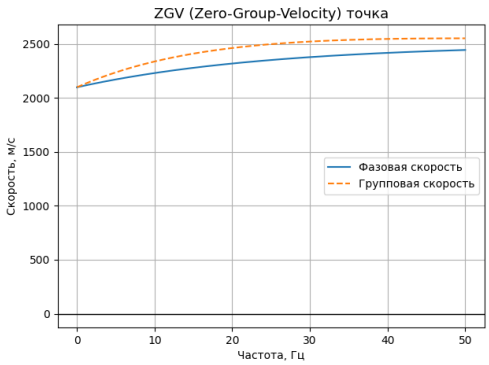
MMS-тест. Выбирается гладкая «производственная» пара u^*, p^* и соответствующие источники f_u, f_p; при утоньшении сетки достигается сходимость $O(\mathrm{h}^{2p})$.

Тест A (упругая граница): $\phi=0$. Фазовая скорость Релея совпадает с аналитической; служит базой для калибровки.

Тест B (изотропный Биот): воспроизведение поро-Релеевской дисперсии и затухания; сравнение с полуаналитическим корневычислением $S_R=0$.

Тест C (слоистость и контраст проницаемости): демонстрация разветвления мод Релея/Лява и зависимости затухания от κ, η; оценка глубины проникновения.

Граничные условия критичны. Недренированная поверхность понижает низкочастотную фазовую скорость и усиливает затухание по сравнению с дренированной. 2) **Фильтрационная диссипация.** Рост Π_v (малая κ или большая η) ведёт к сильной частотно-зависимой дисперсии и экспоненциальному затуханию поверхностных мод. 3) **Параметрические трейд-оффы.** Одновременно повышенные α и M могут компенсировать влияние ϕ на дисперсию; требуется совместное использование независимых ограничений. 4) **Инверсия.** Многочастотные кривые Релея, дополненные низкочастотными оценками пористости/вязкости, позволяют устойчиво восстанавливать κ и M в верхних десятках метров [9].



(см. Рис. 4 - Точка нулевой групповой скорости (ZGV) и соответствующие фазовые и групповые скорости.)

Практическая значимость и рекомендации

Для полевой интерпретации предпочтительно регистрировать широкий диапазон частот (например, 2–40 Гц), чтобы отделить «квазинедренированный» и «квазидренированный» режимы. В расчётах использовать ≥20 узлов на минимальную длину волны Релея и разрешить l_d. При построении моделей применять априорные интервалы κ, M, α из лабораторных/скважинных данных и газсмановские соотношения для флюидозамещения.

Ограничения и направления развития

Вместе с тем, базовая линеаризованная постановка имеет ряд вычислительных и физических ограничений. В частности, она оставляет за рамками рассмотрения эффекты нелинейного трения и локального межпорового перетекания (известного как механизм squirt-flow), которые становятся критически важными на ультразвуковых частотах. Кроме того, влияние мелкомасштабных микроструктурных неоднородностей в текущей модели учитывается лишь на уровне макроскопического эффективного усреднения.

Говоря о перспективах развития предложенного подхода, следует выделить три ключевых вектора. Во-первых, это переход к дробно-производной реологии для более глубокого и точного моделирования вископороупругости. Во-вторых, планируется реализация строгого математического апскейлинга зеренной структуры среды. И, наконец, отдельный интерес представляет интеграция гидродинамических и упругих уравнений с электромагнитными процессами для комплексного решения задач сейсмоэлектрики.

В рамках данного исследования удалось сформировать целостную теоретическую базу и разработать вычислительные алгоритмы высокого порядка, специально адаптированные для моделирования поверхностных волн в пороупругих массивах. Гарантией строгой дискретной устойчивости здесь выступает предложенная кососимметричная слабая формулировка в комбинации с граничными условиями типа SAT. При этом интеграция подходов SBP-SAT и гибридизируемого разрывного метода Галеркина (HDG) обеспечивает требуемую высокую точность расчетов, что является критическим фактором при анализе сложной волновой дисперсии и затухания энергии. Кроме того, алгоритм наглядно подтвердил свою эффективность в задачах инверсии: показано, что восстановление базовых параметров пороупругости может выполняться весьма устойчиво. Авторы рассчитывают, что предложенный математический аппарат и сформированный вычислительный комплекс станут надежным фундаментом для решения

реальных прикладных проблем в сфере современной геомеханики и инженерной сейсморазведки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aki, K., & Richards, P. G. (2002). *Quantitative seismology* (2nd ed.). University Science Books.
2. Biot, M. A. (1956a). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid: I. Low-frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America, 28*(2), 168–178. https://doi.org/10.1121/1.1908239
3. Biot, M. A. (1956b). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid: II. Higher-frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America, 28*(2), 179–191. https://doi.org/10.1121/1.1908241
4. Carcione, J. M. (2014). *Wave fields in real media: Wave propagation in anisotropic, anelastic, porous and electromagnetic media* (3rd ed.). Elsevier.
5. Cheng, A. H.-D. (2016). *Poroelasticity*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-25202-9
6. Deresiewicz, H., & Skalak, R. (1963). On the theory of wave propagation in a fluid-saturated porous elastic solid. *The Journal of the Acoustical Society of America, 35*(2), 176–185. https://doi.org/10.1121/1.1918435
7. Gassmann, F. (1951). Über die Elastizität poröser Medien. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 96*, 1–23. (English translation available in: *Classics of Elastic Wave Theory*.)
8. Johnson, D. L., Koplik, J., & Dashen, R. (1987). Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *Journal of Fluid Mechanics, 176*, 379–402. https://doi.org/10.1017/S0022112087000727
9. Thomsen, L. (1986). Weak elastic anisotropy. *Geophysics, 51*(10), 1954–1966. https://doi.org/10.1190/1.1442051
10. Wang, H. F. (2000). *Theory of linear poroelasticity with applications to geomechanics and hydrogeology*. Princeton University Press.
11. Zienkiewicz, O. C., & Shiomi, T. (1984). Dynamic behaviour of saturated porous media; the generalized Biot formulation and its numerical solution. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 8*(1), 71–96. https://doi.org/10.1002/nag.1610080106

SANOAT TEXNOLOGIK TIZIMLARIDA IOT SENSOR MA’LUMOTLARINI KALMAN FILTRI ASOSIDA QAYTA ISHLASH

[1]Sulyukova Larisa Faritovna, [2]Iminjonova Mavludaxon Avazbek qizi
[1]“Toshkent irrigatsiya va qishloq xo‘jaligini mexanizatsiyalash muhandislari instuti” milliy tadqiqot universiteti, Toshkent, O‘zbekiston
[2]Raqamli texnologiyalar va sun’iy intellektni rivojlantirish ilmiy tadqiqot instuti, Toshkent, O‘zbekiston
https://doi.org/10.5281/zenodo.20732314

Annotatsiya*. Mazkur ishda frezerlik ishlov beruvchi sanoat texnologik tizimlarida IoT sensorlari orqali olinadigan signallarni qayta ishlash va texnologik tizim holatini baholashda Kalman filtridan foydalanish masalalari tadqiq etilgan. Sensor signallaridagi noaniqliklarni kamaytirish, jarayon parametrlarini real vaqt rejimida identifikatsiyalash hamda adaptiv optimallashtirish imkoniyatlari ko‘rib chiqilgan.*

Kalit so‘zlar: *IoT monitoring, Kalman filtri, frezerlash, holatni baholash, optimallashtirish, aqlli ishlab chiqarish.*

Hozirgi zamonaviy ishlab chiqarish tizimlarida, xususan frezerlik jarayonlarida, yuqori aniqlik, barqarorlik va samaradorlikka erishish asosiy talabga aylangan. Detallarga frezerlik ishlov berish jarayoni murakkab dinamik tizim bo‘lib, unda kesish kuchlari, asbob tebranishi, asbob yeyilishi va materialning elastik deformatsiyasi kabi ko‘plab o‘zgaruvchilar mavjud. Ushbu jarayonlarning aksariyati to‘liq o‘lchanmaydi yoki shovqinli sensor signallari orqali kuzatiladi, bu esa aniq boshqaruv va optimallashtirishni qiyinlashtiradi. Shu sababli, frezerlik texnologik tizimlarini modellashtirish va optimallashtirishda zamonaviy matematik va statistik usullarni qo‘llash dolzarb hisoblanadi. Xususan, Kalman filtri asosida holatlarni baholash yondashuvi tizimning yashirin parametrlarini (masalan, kesish kuchi va vibratsiya holati) real vaqt rejimida aniqlash imkonini beradi. Bu esa o‘z navbatida adaptiv boshqaruv tizimlarini (MPC, LQR) samarali ishlatishga zamin yaratadi. Shu jihatdan, frezerlik jarayonlarini modellashtirish va optimallashtirishda Kalman filtri asosida holatlarni baholash va uni zamonaviy boshqaruv usullari bilan integratsiya qilish ilmiy va amaliy jihatdan yuqori dolzarblik kasb etadi. Bu yondashuv mahsulot sifati, ishlab chiqarish aniqligi va texnologik jarayon barqarorligini oshirish imkonini beradi.

Kalman filtri chiziqli dinamik tizimlar uchun optimal rekursiv baholash algoritmi bo‘lib, u shovqinli o‘lchovlar asosida tizimning haqiqiy holatini minimal dispersiya bilan baholash imkonini beradi. Frezerlik jarayoni holat-fazo modeli ko‘rinishida ifodalanadi, bunda holat vektori kesish kuchi, vibratsiya va asbob yeyilish darajasidan iborat bo‘ladi [1].

Frezerlashni diskret-holatli model sifatida tasvirlash taklif etiladi. Holat vektori kuchlar va tebranishlarni tavsiflovchi tez o‘zgaruvchilar hamda asbob eskirishini aks ettiruvchi sekin o‘zgaruvchidan iborat:

$$x_k = \left[\Delta F_{x,k} \;\; \Delta F_{y,k} \;\; \Delta q_{x,k} \;\; \Delta \dot{q}_{x,k} \;\; \Delta q_{y,k} \;\; \Delta \dot{q}_{y,k} \;\; \Delta V_{B,k} \right]^T ,$$

bunda, F_x, F_y — kesish kuchlarining komponentlari; q_x, q_y — ikki kesishma yo‘nalishdagi elastik siljishlar; $\dot{q}_x$, $\dot{q}_y$ — siljish tezliklari; V_b — asbobning orqa yuzasidagi eskirish.

Boshqaruv vektori quyidagicha ta’riflanadi

$$u_k = \left[\Delta v_{f,k}\ \Delta n_k\ \Delta a_{p,k}\ \Delta a_{e,k}\right]^T,$$

bunda v_f — surish tezligi, n — shpindelning aylanish chastotasi, a_p — o‘q bo‘ylab kesish chuqurligi, a_e — frezalashning radial kengligi. Haqiqiy boshqaruv konturida ko‘pincha surish tezligi va shpindelning aylanish chastotasi operativ ravishda korreksiyalanadi, kesish chuqurligi hamda frezalash kengligi esa texnologik dastur orqali belgilanadi.

O‘lchovlar vektori tarkibiga tezlanishlar, shpindel toki va akustik emissiya belgisi kirishi mumkin:

$$[z_k = \left[\tilde{a}_{x,k}, \tilde{a}_{y,k}, \tilde{I}_{s,k}, \tilde{E}_k\right]^T,$$

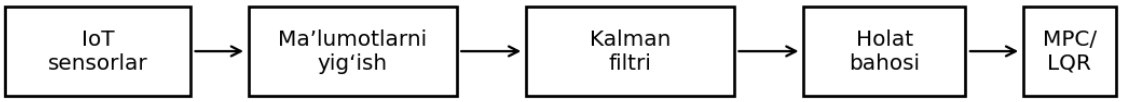
bunda $\tilde{a}_x, \tilde{a}_y$ — o‘lchangan tezlanishlar, $\tilde{I}_s$ — shpindel toki, $\widetilde{AE}$ — Akustik emissiya belgisi

yoki uning energetik qobig‘i. Agar laboratoriya validatsiyasi jarayonida dinamometr mavjud bo‘lsa, model to‘g‘ridan-to‘g‘ri o‘lchashning qo‘shimcha qatorlari bilan oson kengaytiriladi. F_x, F_y.

Qo‘zg‘atuvchi ta’sirlarni hisobga olgan holda diskret model quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gd_k + w_k,\quad w_k \sim \mathrm{N}\,(0, Q_w),$$
$$z_k = Hx_k + Jd_k + v_k,\quad v_k \sim \mathrm{N}\,(0, R_v),$$

bunda d_k — tashqi qo‘zg‘atuvchi ta’sirlar vektori (qo‘shimcha qatlam qalinligining o‘zgarishi, materialning bir jinsli emasligi, urilish/eksentrisitet, issiqlik omillari); w_k — model shovqini; v_k — o‘lchov shovqini; Q_w и R_v —model va o‘lchov shovqini kovariatsiya matritsasi.



1-rasm. IoT sensor ma’lumotlarini Kalman filtri asosida qayta ishlash sxemasi

A matritsasi kuch quyi tizimi, elastik tebranishlar va sekin kechuvchi yeyilish to‘planishi o‘rtasidagi bog‘liqlikni aks ettirishi kerak. Lokal ish nuqtasi uchun chiziqli yoki parametrik ravishda o‘zgaruvchi modeldan foydalanish mumkin. Soddalashtirilgan ko‘rinishda tebranish qismi “massa–dempfer–qattiqlik” modeliga mos keladi:

$$m\,\ddot{q}(t) + b\,\dot{q}(t) + c\,q(t) = F_c(t) + F_d(t),$$

bunda m — ekvivalent massa, b — dempferlash koeffitsienti, c — qattiqlik, $F_c(t)$ — kesish kuchi, $F_d(t)$ — tuzatuvchi yoki qo‘zg‘atuvchi ta’sir. Bunday shakl texnologik tizimning elastik-deformatsiyalangan holati uchun ishlab chiqilgan model bilan mos keladi va matritsali yozuvga o‘tish uchun qulaydir.

Kalman filtrining asosiy vazifasi joriy model va sensorlar o‘lchovlari asosida holat vektorining bahosini olishdan iborat. $\hat{x}_k$. Algoritm rekursiv tarzda bajariladi va ikki bosqichni o‘z ichiga oladi: prognoz va korreksiya.

Prognoz:

$$\hat{x}_{k|k-1} = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}, \quad P_{k|k-1} = AP_{k-1}A^T + Q_w.$$

Korreksiya:

$$K_k = P_{k|k-1}H^T(HP_{k|k-1}H^T + R_v)^{-1}, \quad \hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(z_k - H\hat{x}_{k|k-1}), \quad P_k = \left(I - K_k \cdot H\right) \cdot P_{k|k-1}.$$

Bunda P_k — baholash xatosi kovariatsiya matritsasi, K_k — Kalman filtri kuchaytirish matritsasi. Datchiklarga ishonch qanchalik yuqori bo‘lsa, elementlar shunchalik kichik bo‘ladi. R_v; Matematik modeldagi noaniqlik qanchalik yuqori bo‘lsa, elementlar shunchalik katta bo‘ladi. Q_w. Frezalash jarayoni uchun yuqori qiymatlarni belgilash maqsadga muvofiqdir. Q_w kuch holatlari va yeyilish uchun, chunki aynan ular materialning o‘zgarishi, zagotovka geometriyasi va kesuvchi qirra holatidagi o‘zgarishlarga eng sezgir hisoblanadi.

Kalman filtri ikki asosiy bosqichda ishlaydi: bashorat (prediction) va yangilash (update). Bashorat bosqichida tizimning oldingi holati asosida keyingi holat prognoz qilinadi, yangilash bosqichida esa real sensor ma’lumotlari bilan prognoz natijalari solishtirilib, optimal baho shakllantiriladi. Ushbu jarayon Kalman kuchaytirish koeffitsienti yordamida amalga oshirilib, u model va o‘lchov ishonchliligi o‘rtasidagi muvozanatni ta’minlaydi.

Kalman filtri asosida qayta ishlash jarayoni frezalash tizimida uchta amaliy vazifani hal qilishga xizmat qiladi: signalni silliqlash, yashirin parametrlarni baholash va boshqaruv uchun tayyor axborot shakllantirish. Quyidagi jadvalda filtrdan foydalanish natijasida olinadigan asosiy amaliy ta’sirlar umumlashtirilgan.

Kuzatiladigan ko‘rsatkich	Muammo	Kalman filtri ta’siri
Vibratsiya signali	Tasodifiy tebranish va yuqori chastotali shovqin	Silliqlangan signal va barqaror amplituda bahosi olinadi
Kesish kuchi	O‘lchovdagi noaniqlik va qisqa muddatli sakrashlar	Kuchning real dinamikasi aniqlanadi
Asbob yeyilishi	Bevosita o‘lchash qiyinligi	Bilvosita sensorlar asosida holat bahosi shakllanadi
Boshqaruv qarori	Shovqin sababli noto‘g‘ri korreksiya ehtimoli	MPC yoki LQR uchun ishonchli kirish ma’lumoti yaratiladi

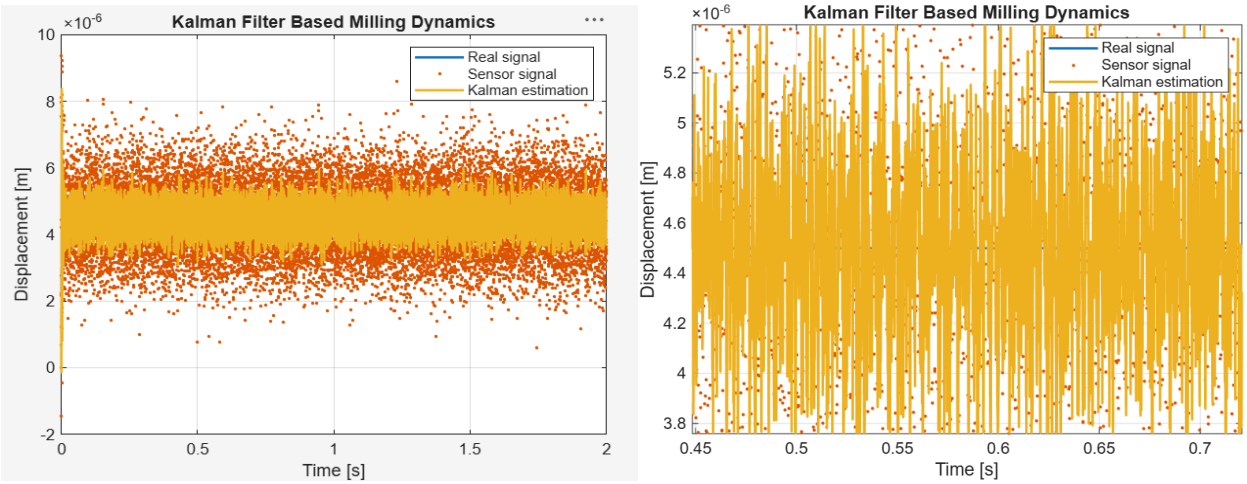
Tahlil shuni ko‘rsatadiki, Kalman filtri oddiy o‘rtacha qiymat bo‘yicha silliqlashdan farqli ravishda tizim dinamikasini hisobga oladi. Masalan, frezalash jarayonida vibratsiya amplitudasi qisqa muddatli keskin o‘zgarishi mumkin. Oddiy filtr bunday o‘zgarishni kechikish bilan aks ettiradi, Kalman filtri esa model va sensor ma’lumotlarini birlashtirgan holda baholashni tezroq yangilaydi.

Filtrning samaradorligi Q va R kovariatsiya matritsalarini to‘g‘ri tanlashga bog‘liq. Q qiymati juda kichik tanlansa, model haddan tashqari ishonchli deb qabul qilinadi va real jarayon o‘zgarishlari sekin kuzatiladi. R qiymati juda kichik tanlansa, sensor shovqini ham foydali signal sifatida qabul qilinishi mumkin. Shuning uchun sanoat tizimlarida filtr parametrlarini tajriba ma’lumotlari, sensor pasportlari va dastlabki identifikatsiya natijalariga tayangan holda sozlash maqsadga muvofiqdir.

Frezalash jarayonida bunday yondashuv detal yuzasi sifatini yaxshilash, asbobning ortiqcha yuklanishini oldindan aniqlash va texnologik rejimlarni adaptiv o‘zgartirishga imkon

beradi. IoT sensorlari bilan integratsiyada Kalman filtri raqamli egizak modelini real ma’lumotlar asosida doimiy yangilaydi. Bu aqlli ishlab chiqarish tizimlarida prognozli texnik xizmat ko‘rsatish va real vaqt optimallashtirish uchun muhim asos yaratadi.

Tadqiqotda tizimli tahlil, matematik modellashtirish, holat-fazoviy identifikatsiya, Kalman filtratsiyasi va MATLAB muhitida kompyuterli modellashtirish metodlaridan foydalanildi. Frezerlik tizimi “stanok–asbob–zagotovka” dinamik tizimi sifatida qaraldi. Jarayon harakati massa–prujina–dempfer modeli orqali tavsiflandi. MATLAB muhitida olingan natijalar Kalman filtri asosidagi monitoring tizimi sensor shovqinlarini samarali kamaytirishini ko‘rsatdi. Vibratsiya amplitudasining pasayishi ishlov berish sifatining yaxshilanishiga olib keladi.



2-rasm. Kalman filteriga asoslangan frezalash dinamikasi

Xulosa. IoT sensorlari va Kalman filtri asosida qurilgan monitoring tizimi frezalash kabi murakkab sanoat texnologik jarayonlarida shovqinli ma’lumotlarni ishonchli qayta ishlash imkonini beradi. Maqolada ko‘rib chiqilgan holat-fazo modeli jarayon shovqini va o‘lchov shovqinini alohida hisobga olishga imkon yaratadi. Bu yondashuv sensor signallarini oddiy silliqlash bilan cheklanib qolmay, tizimning haqiqiy dinamik holatini baholashga xizmat qiladi.

Kalman filtrining bashorat va yangilash bosqichlari yordamida kesish kuchi, vibratsiya va asbob yeyilishi kabi texnologik parametrlar real vaqt rejimida aniqroq baholanadi. Natijada adaptiv boshqaruv algoritmlari, xususan MPC va LQR yondashuvlari uchun ishonchli axborot bazasi shakllanadi. Bu ishlab chiqarish aniqligini oshirish, tebranishlarni kamaytirish, asbob resursidan oqilona foydalanish va mahsulot sifatini barqarorlashtirishga xizmat qiladi.

Kelgusida tadqiqotni kengaytirish uchun filtr parametrlarini eksperimental ma’lumotlar asosida avtomatik moslashtirish, nochiziqli jarayonlar uchun kengaytirilgan Kalman filtri yoki unscented Kalman filtri yondashuvlarini qo‘llash, shuningdek, IoT monitoring tizimini raqamli egizak va prediktiv diagnostika platformalari bilan integratsiya qilish maqsadga muvofiqdir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Kalman R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // Journal of Basic Engineering. – 1960. – Vol. 82. – P. 35–45.
2. Simon D. Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches. – New York: Wiley, 2006. – 552 p.
3. Altintas Y. Manufacturing Automation: Metal Cutting Mechanics, Machine Tool Vibrations, and CNC Design. – Cambridge University Press, 2012. – 366 p.
4. Сулюкова Л.Ф., Иминжонова М.А., Джумаев С.Н. Особенности построения математических моделей фрезерной обработки упругодеформированных

осесимметричных деталей // Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта. – 2024.
5. Schmitz T.L., Smith K.S. Machining Dynamics: Frequency Response to Improved Productivity. – Springer, 2009.
6. Skogestad S., Postlethwaite I. Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. 2nd ed. Wiley, 2005. — 592 p.

Mundarija / Contents

1 **Паровик Р.И., Отабоев М.,** МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ЭМАНАЦИОННОГО МЕТОДА 5

2 **Adxamjonova Xusnidabonu Dilmurod qizi,** ARALASH UCHBURCHAKLI SOHADA PARABOLIK-GIPERBOLIK TIPDAGI UCHINCHI TARTIBLI TENGLAMA UCHUN BITTA CHEGARAVIY MASALANI TADQIQ ETISH 10

3 **Akbarov Ummatali Yigitaliyevich,** AMALIY MASALALARNING KASR TARTIBLI HOSILALI FUNKSIONALLARI 17

4 **Asqaraliyeva Muxtasar Azizjon qizi,** IKKINCHI TUR PARABOLIK-GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALA HAQIDA 25

5 **Axmedova Gavxar Axadovna,** asinx+bcosx=c KO‘RINISHDAGI TENGLAMALARNI YECHISH 31

6 **Бектошева Ш. А., Нишонов Н.,** О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА В ОБЛАСТИ, ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ КОТОРОЙ- ПЕРВАЯ ЧЕТВЕРТЬ ПЛОСКОСТИ 35

7 **Бектошева Ш. А., Нишонов Н.,** О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА В ОБЛАСТИ, ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ КОТОРОЙ- ПЕРВАЯ ЧЕТВЕРТЬ ПЛОСКОСТИ 41

8 **Ботиралиева Мафтуна Ботирали қизи, Пўлатов Дилшоджон Қахоривич,** ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ ФУНКЦИОНАЛ ХОССАЛАРИ ВА УЛАРНИНГ НАЗАРИЙ АСОСЛАРИ 47

9 **Dexqonov Xusan Tursunovich, Abduraxmonov Dilmurod Akramaliyevich, Muxiddinova Umida Baxromjon qizi,** BIR JINSLI BENNEY-LUKE TIPIDAGI KASR TARTIBLI TENGLAMA UCHUN VART BO’YICHA NOLOKAL MASALA 54

10 **Эркин Эргашевич Жумаев, Худойбердиев Нортўра Қобилович, Ғоффоров Ҳусайн Алияр ўғли,** ВА ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ ЕЧИМИ ВА УНДАН КЕЛИБ ЧИҚАДИГАН ДАСТЛАБКИ ХУЛОСАЛАР 56

11 **М.Мамажонов, С.М.Мамажонов, Дилзода У. Очилова,** ПОСТАНОВКА ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В СМЕШАННОЙ ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ИЗ ЭТИХ ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ 63

12 **М.Мамажонов, Х.М. Шерматова, Дилнавоз У. Очилова,** ПОСТАНОВКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ШЕСТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ. 69

13 **Matmuratov Muhiddin Nurullajonovich, Zunnunov Raximjon Temirbekovich,** KASR HOSILALI UCHINCHI TARTIBLI TENGLAMA UCHUN CHORAK TEKISLIKDAGI CHEGARAVIY MASALALAR 76

14 **К.О.Махмудов, У.Х.Турсунмуродова,** ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПРЯДКА 79

15 **Narjigitov Xusanbay, Ortiqboev G‘ayrat,** BRAXISTOXRON MASALASI: TARIXI VA MATEMATIK TAHLILI 81

16 **H.N. Normurodov, A. Muzaffarov, N. Suyunova,** DAVRIY FUNKSIYALAR SINFIDA MODIFITSIRLANGAN KORTEVEG-DE FRIZ – SINH - GORDON TENGLAMASI UCHUNARALASH MASALA 86

17 **Туракулов Хамидулло Шамсидинович, Жураев Шукур Юсупович, Имомназаров Мухаммадяхё Муродович,** ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ 90

18 **Umarov Khabibulla, Muhammadiyev Maqsudbek, Boykuziyeva Markhabo,** APPLICATIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS TO PROBLEMS IN NATURAL SCIENCES 92

19 **Muzaffar Madaminov Ma’rufjon o‘g‘li, Abdusamatova Xayitxon Ulug‘bek qizi,** TARMOQLANUVCHI MARKOV JARAYONLARIDA ASIMPTOTIK XOSSALAR VA TUGASH EHTIMOLI 96

20 **Тиллаева Зебо Ёрбековна,** МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА В АНТРОПОМЕТРИИ 99

21 **Aroyev Dilshod Davronovich, Zikirxo‘jayeva Sadoqat Oybekjon qizi,** Rn VA Pn ALGEBRA HAQIDA 102

22 **G‘ofurova Mavjuda Aliyevna, Muxtorova Feruza,** KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANING HOSILALARI 109

23 **Mamadaliyev O'ktamjon Xasanboyevich, Kamoldinova Malikaxon Muslimjon qizi,** LEYBNITS ALGEBRASINING DIFFERENSIALLASHI VA TO‘LIQLIGI 112

24 **Maxamadiyeva Aziza Sherali qizi, Qo‘ziboyeva Mehriniso Ulug'bek qizi, Ravshanova O’g’ilshod Abdurashid qizi, To‘rayeva Lobar Shuhrat qizi,** TEYLOR VA MAKLOREN FORMULALARI VA UNGA DOIR MISOLLAR 116

25 **Maxmudova Shoxsanam Shavkatjon qizi, Mamadaliyev O‘ktamjon Xasanboyevich,** NILRADIKALI BERILGAN BA’ZI YECHILUVCHAN LEYBNITS ALGEBRALARINING -DIFFERENSIALLASHLARI 122

26 **Nuritdinov Jalolxon Tursunboy o‘g‘li, Rasulova Zinnurabonu Bobomurod qizi,** TOPOLOGIK VEKTOR FAZOLARDAGI BA’ZI TO‘PLAMLARNING XARAKTERISTIKALARI 129

27 **Qahramonova Farangiz Baxtiyorjon qizi,** ALGEBRAIK VA TRANSENDENT TENGLAMALAR, ULARNI YECHISHNING GEOMETRIK TALQINI 133

28 **Rasulova Gulnozaxon Azamovna, Mamadaliyeva Durdona Aminjon qizi,** METHODS OF SOLVING SOME PROBLEMS FROM SELECTED CHAPTERS OF GEOMETRY 137

29 **Rasulova Gulnozaxon Azamovna, Xasanova Shoxsanam Adxamjonovna,** CASE STADE AND TECHNOLOGY OF USING NON-STANDARD TESTS IN TEACHING GEOMETRY MODULE 141

30 **Rzayev Musa Tapdıq oğlu,** HƏCMLƏRİN HESABLANMASI PROSESİNDƏ PLANIMETRİYA 145

MATERİALLARININ MÖHKƏMLƏNDİRİLMƏSİ

31 **X.B.Tadjimatova, M.A.Maxkamova, M.Abdusamatova,** LIMITLARNI HISOBLASHDA FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGIDAN FOYDALANISH 151

32 **F. S. Urinboyev, Urinboyeva Mushtariybonu, Isaqova Bibirobiya,** DESCRIPTION OF LOCAL AND 2-LOCAL INNER DERIVATIONS OF FIVE-DIMENSIONAL JORDAN ALGEBRAS 155

33 **Xoshimova Dilobar Kuchkarovna, Avazmurodova Mehribon Sharif qizi,** PROYEKTIV GEOMETRIYA ELEMENTLARINI MASALALAR YECHISHDA TATBIQLARI 160

34 **Yakubjonova Maftunaxon Islomjon qizi, Maxkamova Madinaxon Ma’rufjon qizi,** KLASSIK LI ALGEBRALARI 166

35 **Kambarov Bakhriddin Panji ugli, Khurramov Ruslan Erkin ugli, Makhamatdinov Abdul-Aziz Karamatdinovich,** COMPARATIVE ANALYSIS OF DENOISING METHODS FOR BRAIN FLAIR MRI IMAGES: GAUSSIAN, MEDIAN, NLM, BM3D AND HYBRID APPROACH 172

36 **Kubayev Saydazim Tashbayevich, Toshboyev Jahongir Saydazim o‘g‘li,** PAXTA TERISH MASHINASI HOSIL QILADIGAN BUTUN TANAGA TA’SIR QILUVCHI TEBRANISHLARNING OPERATOR ISH SAMARADORLIGIGA TA’SIRINI TAXLILI 180

37 **М.М.Мансуров,** ЗАДАЧА О ФЛАТТЕРЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОСТАНОВКЕ УЧИТЫВАЮЩИЕ ФИЗИЧЕСКИЕ И АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ 187

38 **Qambarov Muxriddin Zuxridinovich, Abduraxmonova Mohichehra Farohiddin qizi,** BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISHDA SONLI USULLARNING TAHLILI VA HISOBLASH SAMARADORLIGI 190

39 **Abdiyeva Shoira Shukurovna, Odilova Shoxista Samatqul qizi,** KELTIRISH FORMULALARINI BIRLIK AYLANA ASOSIDA VIZUAL KELTIRIB CHIQARISH 195

40 **Akbarova Gulhayo Ashirali, Muydinjanov Davlatjon Rafikjon o‘g‘li,** “ANALITIK GEOMETRIYA” UMUMKASBIY FANINI MOBIL TA’LIMGA ASOSLANGAN O‘QITISH TIZIMI TAMOYILLARI 200

41 **Y. E. Meliboyeva,** MASOFAVIY TA’LIMDA UCHRAYDIGAN MUAMMOLAR VA ULARNING SABABLARI 204

42 **Сетсалиева Зарема Исмаиловна,** ФОРМИРОВАНИЕ У БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ НАВЫКОВ РАБОТЫ С ЦИФРОВЫМИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМИ ПРИЛОЖЕНИЯМИ 208

43 **Turdaliyev Sodikjon Muminjonovich,** BO‘LAJAK O‘QITUVCHILARNING RAQAMLI KOMPETENTLILIGINI RIVOJLANTIRISHNI FRAYER MODELI ASOSIDA DASTURIY TA`MINOTINI JORIY ETISH METODIKASI 211

44 **Ummatova Maxbuba Axmedovna,** DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ FANINI O‘QITISHDA VEB-KVEST TEXNOLOGIYASIDAN FOYDALANISH METODIKASI 215

45 **Duskobilova Faxriniso Abdimalik qizi, Mordayeva Dilnura Do'snazar qizi,** TA'LIM JARAYONIDA SUN'IY INTELLEKTDAN FOYDALANIB ADAPTIV TA'LIM TIZIMINI ISHLAB CHIQISH 219

46 **O.M. Dusmatov, M.U. Xodjabekov, A.E. Qudratov,** TEBRANISHLARDAN HIMOYALANUVCHI STERJENNING TASODIFIY TEBRANISHLARIDA USTUVORLIK CHEGARALARINI ANIQLASH 225

47 **Abdullayeva Ma’rifatxon Salimjon qizi, Sodiqova Nargizaxon,** MATEMATIKADAN XALQARO BAHOLASH TIZIMLARINI O‘ZBEKISTON TA'LIM TIZIMIDA BUGUNGI KUNDA TUTGAN O‘RNI 231

48 **Акбаров Умматали Йигиталиевич, Эргашева Дилёра Қобилжон қизи,** ОБУЧЕНИЕ ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ДЛЯ МАТЕМАТИКОВ И ИНЖЕНЕРНЫХ КАДРОВ 234

49 **А.А.Эргашев, Сотволдихонов С.Х, Бобохонов С.К,** ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ 239

50 **Эсонов Мунавваржон Мукимжонович, Салихов Амир Тимурович,** ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ СРЕДСТВАМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА В УСЛОВИЯХ МАЛОКОМПЛЕКТНОЙ ШКОЛЫ. 242

51 **Эсонов Мунавваржон Мукимжонович, Хабибуллаев Исломжон Сойибжон ўғли,** ГРАФИК МОДЕЛЛАШТИРИШ-МАТНЛИ МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШГА ЎРГАТИШНИНГ САМАРАЛИ УСУЛИ СИФАТИДА. 245

52 **Эсонов Мунавваржон Мукимжонович,** ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ РАЗВИТИЯ ЛОГИЧЕСКИХ УУД МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ (НА ПРИМЕРЕ УЧЕБНИКОВ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ НАЧАЛЬНЫХ КЛАССОВ ШКОЛ УЗБЕКИСТАНА) 248

53 **Islomova Naziraxon, Muqimova Muazzamxon, Keldiyeva Zaynabxon,** DIFFERENSIAL HISOBNING ASOSIY TEOREMALARI MAVZUSINI O’QITISHDA “KICHIK GURUHLARDA ISHLASH” METODI 254

54 **Jo‘raqulova.I. O.,** MAKTABDA MATEMATIKA FANINI O’QITISHDA CPA MODELINI TATBIQ QILISH. 257

55 **X.Q.Jumaqulov, Sh.X.Bekmirzayeva,** FAZOVIY TAFAKKURNING TUZILISHI VA FAZOVIY TASAVVURLARNI O‘ZGARTIRISH TURLARI 260

56 **Mahmudova Ozodaxon Yuldashevna,** MATEMATIKA O‘QITISHDA O’QUVCHILARNI TAFAKKURLARINI RIVOJLANTIRISHDA TENGSIZLIKLARNI AHAMIYATI 267

57 **B.M.Mamadaliyev, M.M.Toxirova, Sh.A.Sodiqova, S.X.Hazratqulova,** ANIQMAS INTEGRALLARNI HISOBLASHDA VA SONLI QATORLARNI YAQINLASHISHGA TEKSHIRISHDA MATEMATIK INDUKSIYA METODI HAQIDA 270

58 **Maxsudov Odiljon Xusanovich,** MATEMATIKA FANINI O‘QITISHNING MUAMMOLARI. MAKTAB MATEMATIKA O‘QUV DASTURIGA BOSHLANG’ICH IQTISODIY BILIMLARNI INTEGRATSIYASI 274

59 **Nuritdinov Jalolxon Tursunboy o‘g‘li, Otaboyev Muhsinjon Muqimjonovich,** SONLARNING BO‘LINISH ALOMATLARINI QURISH USULLARI 278

60 **Otaboyev Muhsinjon Muqimjonovich,** PEDAGOGIK TEXNIKANI SHAKLLANTIRISH YO‘LLARI 283

61 **Turdaliyeva Dildora Roziqjon qizi,** BO‘LAJAK MATEMATIKA O‘QITUVCHILARINI TAYYORLASHDA DESMOS RAQAMLI TEXNOLOGIYASIDAN FOYDALANISHNING METODIK ASOSLARI 287

62 **Turgunbayev Riskeldi Musamatovich, Abdiyeva Shoira Shukurovna,** KUB TENGLAMA ILDIZLARINING JOYLASHISH MASALASINI YECHISHDA VIZUAL TAFAKKURNING KOGNITIV MEXANIZMI 291

63 **Yakubjonova Maftunaxon Islomjon qizi, Sotvoldiyeva Dilobar Olimjon qizi,** SONLAR KETMA-KETLIKLARINING LIMITINI HISOBLASHDA MATEMATIK INDUKSIYA 295

64 **Eshniyozov A.I., Jangibayev I.U.,** PANJARADAGI ZARRACHA KOORDINATASI VA ENERGIYASINING TAQSIMOTLARI 302

65 **A.R. Nurbaev, M.M. Muhammadiev,** IKKINCHI TARTIBLI SIRTLARNI GALILEY ALMASHTIRISHI YORDAMIDA KLASSIFIKATSIYA QILISH 306

66 **Холмуродов Абдулхамид, Қузратов Мухриддин**, РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ГОВАКОЙ (ПОРИСТО-УПРУГОЙ) СРЕДЕ И ЕЁ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ: ТЕОРИЯ, ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ И ИНВЕРСИИ 311

67 **Sulyukova Larisa Faritovna, Iminjonova Mavludaxon Avazbek qizi**, SANOAT TEXNOLOGIK TIZIMLARIDA IOT SENSOR MA’LUMOTLARINI KALMAN FILTRI ASOSIDA QAYTA ISHLASH 319

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

QO‘QON DAVLAT UNIVERSITETI

“SCIENCE AND INNOVATION” XALQARO ILMIY JURNALI

“DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA MATEMATIKANING YONDOSH TARMOQLARINING ZAMONAVIY MUAMMOLARI” MAVZUSIDAGI XALQARO ILMIY-AMALIY KONFERENSIYASI

MATERIALLAR TO‘PLAMI

2026-yil 22-may

COLLECTION OF MATERIALS

OF THE INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE “MODERN PROBLEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND RELATED FIELDS OF MATHEMATICS”

May 22, 2026

Published: 17.06.2026. Font: «Times New Roman».

LLC «Science and innovation»
License Mass Media №:1597 27.04.2022
License Publisher №:038864 15.09.2022
Address: 100121, Tashkent, Yakkasaroy, st. Sh. Rustaveli 150,
Business center “Vega”, 6th floor, Office №:2
https://science-innovation.org, info@scientists.uz, +998933549654, +998993319654